UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Problema de Cauchy asociado a un ecuación del tipo KZKP con dispersión transversal fraccionaria

Jorge Morales Paredes

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento Matemáticas
Bogotá, Colombia
2020

Problema de Cauchy asociado a un ecuación del tipo KZKP con dispersión transversal fraccionaria

Jorge Morales Paredes

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Doctor en Ciencias - Matemáticas

Director: Ph.D., Félix Humberto Soriano Méndez

Línea de Investigación:

Ecuaciones en derivadas parciales dispersivas de evolución.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2020

Resumen

En este trabajo se estudia el problema de Cauchy de tipo ZK-KP

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \mathcal{H} D_x^\alpha u_{yy} + u u_x, \\ u(0) = \psi \end{cases}$$

donde $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert en la variable x y D_x^α es la α-ésima derivada fraccionaria en x definida vía transformada de Fourier por $\widehat{D_x^s f}(\xi, \eta) = |\xi|^s \widehat{f}(\xi, \eta)$. Se demuestra el buen planteamiento de este problema en espacios de Sobolev anisotrópicos H^{s_1, s_2} no periódicos y se examinan propiedades de mal planteamiento para $-1 \leqslant \alpha < 0$.

Palabras y frases claves: Problema de Cauchy, Ecuación Kadomtsev-Petviashvili, Ecuación de Zakharov-Kuznetsov, Buen planteamiento local, Espacios de Sobolev anisotrópicos, Teoría de Kato.

Abstract

In this work it shall be studied the Cauchy problem for the following ZK-KP type equation

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \mathcal{H}D_x^{\alpha}u_{yy} + uu_x, \\ u(0) = \psi \end{cases}$$

where $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\mathcal{H}$ denotes the Hilbert transform in the x variable and D_x^{α} is the α^{th} fractional derivative defined via Fourier transform by $\widehat{D_x^s f}(\xi,\eta) = |\xi|^s \widehat{f}(\xi,\eta)$. It is showed the local well posedness in the ansisotropic Sobolev spaces H^{s_1,s_2} and examined ill-posedness properties for $-1 \leqslant \alpha < 0$.

Key words and phrases: Cauchy Problem, Kadomtsev-Petviashvili Zakharov-Kuznetsov Equation, Local well posedness, Anisotropic Sobolev Spaces, Kato Theory

Contenido

Resumen v

Introducción 2

1 Preliminares 8

1.1 Resultados básicos 8

1.2 Teoría de Kato 11

1.2.1 Caso lineal 11

1.2.2 Caso Cuasilineal 12

1.3 Otros resultados 14

2 Buen planteamiento en los espacios $H^s(\mathbb{R}^2)$ 15

2.1 Buen planteamiento en los espacios $H^s(\mathbb{R}^2)$ 15

2.2 Buen planteamiento en X^s, $\tilde{X}^s_\alpha$ y Y^s 19

3 Buen planteamiento en espacios de baja regularidad 20

3.1 Estimativas lineales 20

3.2 Estimativa de energía 26

3.3 Una estimativa tipo Strichartz 27

3.4 Buen planteamiento 29

3.4.1 Demostración del Teorema 3.9 32

4 Observaciones de mal planteamiento de la ecuación (0.13) 40

4.1 El flujo asociado al problema (0.13) no es C^2 40

Bibliografía 46

Introducción

Las ecuaciones no lineales de evolución juegan un importante papel en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería. Cabe mencionar algunas de ellas: la mecánica de fluidos, la física del plasma, la fibra óptica, la física del estado sólido, la cinética química, la física química y la geoquímica, entre otras. A partir del estudio de las soluciones de éstas, se intentan entender los efectos de dispersión, difusión, reacción y convección asociados a los modelos descritos por estas. Por ejemplo, la ecuación Korteweg-de Vries

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{0.1}$$

que modela el comportamiento de las ondas de aguas en canales poco profundos, tiene como soluciones ondas solitarias que se comportan como partículas, por lo que Kruskal y Zabusky las llamaron *solitones* en su trabajo de 1965 ([37]). Estos solitones son estables, en el sentido de que si una solución de la ecuación KdV (ecuación (0.1)) que difiere, inicialmente, muy poco en su forma de las soluciones tipo solitón, a lo largo del tiempo, su forma mantendrá un aspecto que diferirá muy poco a la forma de una solución tipo solitón (vea [4] y [6]); de hecho, a la larga estas soluciones toman la forma de solitones (vea [31]). Desde el punto de vista práctico, la noción de estabilidad de solitones nos garantiza que, teniendo un meticuloso cuidado, en el laboratorio podremos reproducir estos fenómenos, observados por primera vez por J. Scott Russell en 1834.
La ecuación de Benjamin-Bona-Mahony

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \tag{0.2}$$

fue introducida en [5] con la intención de modelar la propagación de ondas largas de pequeña amplitud, donde el efecto dispersión es puramente no lineal. La manera en que esta fue obtenida, se persiguía llegar a una ecuación equivalente a la ecuación KdV (0.1). Es interesante observar que a pesar de esta intención, desde el punto de vista meramente matemático, estas ecuaciones presentan significativas e interesantes diferencias.
Otras ecuaciones unidimensionales son, una, la introducida, independientemente, por Benjamin en [3] y Ono en [30],

$$u_t + \mathcal{H}u_{xx} + uu_x = 0. \tag{0.3}$$

la cual modela las ondas internas en fluidos estratificados profundos, donde $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert. La otra, es la regularizada Benjamin-Ono

$$u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0 \tag{0.4}$$

donde $u = u(x,t)$ es una función real, con $x, t \in \mathbb{R}$. Está ecuación es un modelo para la evolución en el tiempo de ondas con crestas grandes en la interface entre dos fluidos inmisibles.
Existen versiones bidimensionales que extienden las ecuaciones anteriormente mencionadas. Para el caso de la ecuación KdV tenemos la ecuación Kadomtsev-Petviashvilli, vea [10],

$$(u_t + auu_x + u_{xxx})_x \pm u_{yy} = 0, \tag{0.5}$$

que describe las ondas en películas delgadas de alta tensión superficial. Otra es la ecuación de Zakharov-Kuznetsov

$$u_t = (u_{xx} + u_{yy})_x + uu_x, \tag{0.6}$$

la cual surge en el estudio de la dinámica de fluidos geofísicos en conjuntos isotrópicos (medios en los cuales las características de los cuerpos no dependen de la dirección) y ondas acústicas iónicas en plasmas magnéticos.
Como extensión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono consideramos la siguiente familia de ecuaciones

$$\left(u_t + u^p u_x + \mathcal{H}(u_{xx} + \alpha u_{yy})\right)_x - \gamma u_{yy} = 0 \quad p \in \mathbb{N}. \tag{0.7}$$

Esta es el modelo del movimiento de ondas largas dispersivas débilmente no lineales en un sistema de dos fluidos, donde la interface es sujeta a capilaridad y el fluido de la parte inferior es infinitamente profundo (vease [1], [2] y [18]). Otra versión que ha recibido alguna atención en la literatura reciente es la ecuación ZK-BO

$$u_t = (\mathcal{H}u_x + u_{yy})_x + uu_x, \tag{0.8}$$

Para terminar esta introducción nos permitimos mencionar las ecuaciones que presentan un tipo de dispersión más general que incluyen como casos particulares los mencionados anteriormente. Un caso de éstos es la ecuación integro diferencial de Whitham

$$u_t + \alpha uu_x + k * u_x = 0. \tag{0.9}$$

Esta fue introducida por Whitman en [36] para modelar el quiebre de ondas dispersivas en el agua. Es claro que si $k = \delta + \delta''$ o $k = \text{v.p.}\frac{1}{x}$ tenemos las ecuaciones KdV y BO anteriomente mencionadas. También se tiene la que Lannes y Saut denominan la ecuación KdV de dispersión fraccionaria fKdV (vea [22])

$$u_t + \alpha uu_x + \partial_x D^\alpha u = 0, \tag{0.10}$$

donde $D = \sqrt{-\partial_x^2}$. En los trabajos [8], [19], [24] y [25] establecen la relación entre el parámetro α y el surgimiento de singularidades o el de la existencia global de soluciones en su

espacio de energía, así de cómo se relaciona este comportamiento con la existencia y estabilidad de las ondas solitarias asociadas a estas ecuaciones. Cabe decir que en esta dirección hay interesantes problemas abiertos, aunque realmente pueden ser muy difíciles.
En este momento creemos importante también mencionar el trabajo de Kenig, Martel y Robbiano ([16]) que demuestra la explosión de las soluciones en el espacio de energía de la ecuación de dispersión generalizada BO (una versión ligeramente diferente de la fKdV)

$$u_t + |u|^{2\alpha} u_x + \partial_x D^\alpha u = 0, \tag{0.11}$$

cuando la condicion inicial es “más grande” que la “forma” de la onda solitaria asociada a esta ecuación.
En el caso bidimensional tenemos la ecuación introducida por Lannes en [21] para modelar ondas largas de pequeña amplitud en regímenes débilmente transversales

$$u_t + \mu \frac{3}{2} u u_x + c_{ww}(\sqrt{\mu}|D^\mu|) \left(1 + \frac{D_x^2}{D_y^2}\right)^{\frac{1}{2}} u = 0, \tag{0.12}$$

donde

$$c_{ww}(k) = \left((1+\beta k^2)\frac{\tanh(k)}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ y } |D^\mu| = \sqrt{D_x^2 + \mu D_y^2}.$$

En [22] se establece la relación entre la ecuaciones KP y FDKP. De hecho, remarcan la diferencia en el carácter dispersivo con respecto al parámetro β. Además, haciendo límite sobre el parámetro μ se obtienen las ecuaciones KPII o KPI cuando $\beta = 0$ o $\beta > 0$ respectivamente. Una interesante conjetura allí es la existencia de ondas solitarias para los valores β mayores que $1/3$.
En este trabajo consideraremos el problema de Cauchy de tipo ZK-KP

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \mathcal{H} D_x^\alpha u_{yy} + u u_x, \\ u(0) = \psi \in Z \end{cases} \tag{0.13}$$

para $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, donde $\mathcal{H}$ denota la transformada de Hilbert en la variable x definida por

$$\mathcal{H}(f) = \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int \frac{f(y)}{x-y}\, dy \quad f \in H^s(\mathbb{R}),$$

para cada $f \in \mathcal{S}$, D_x^α es la α-ésima derivada fraccionaria homogénea en respectos a la variable x definida por

$$\widehat{D_x^\alpha f}(\xi, \eta) = |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi, \eta),$$

y Z es cualquiera de los espacios de Sobolev X^{s_1,s_2}, $\widehat{X}^{s_1,s_2}$, Y^{s_1,s_2} y $\widehat{Y}^{s_1,s_2}$, que especificaremos en las notaciones.

Los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$ son los problemas de Cauchy correspondientes a las muy populares ecuaciones KZ y KPI, respectivamente, que fueron mencionadas anteriormente en esta introducción. Si $u(x, y, t)$ es solución de (0.13), entonces u_λ dada por

$$u_\lambda(x, y, t) = \lambda^2 u(\lambda x, \lambda^{\frac{3-\alpha}{2}} y, \lambda^3 t)$$

también es solución de (0.13) y

$$\|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)} = \lambda^{s_1+\frac{3+\alpha}{4}} \|u(t)\|_{\dot{H}^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)}$$

con $s_2 = \frac{2s_1}{3-\alpha}$. Esto nos sugiere que el buen planteamiento local se puede asegurar en $H^{s_1,\frac{2s_1}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^2)$ para $s_1 \geqslant -\frac{3+\alpha}{4}$.

En este trabajo nos proponemos mostrar el buen planteamiento del problema de Cauchy (0.13) en los Sobolev Z mencionados anteriormente. Para este propósito la teoría de Kato para ecuaciones cuasilineales y las ideas introducidas por Kenig [15] para la ecuación KP-I y desarrolladas por Linares, Pilod y Saut en [26] para las ecuaciones f-KPI y f-KPII. Específicamente, es aprovechar de la mejor manera la estimativa Strichartz que nos proporciona el grupo generado por la ecuación lineal homogénea asociada a (0.13), haciendo uso de estimativas de energía. También haremos algunas observaciones de mal planteamiento de esta ecuación para $-1 \leqslant \alpha < 0$. Para ésto usaremos las ideas desarrolladas por Molinet, Saut y Tzvetkov en [29]. Más precisamente, mostraremos que el flujo asociado a las soluciones de (0.13) no es de clase C^2. Ésto en particular, implica que a la ecuación integral dada por el principio de Duhamel, que se obtiene al hacer variación de parámetros con el grupo generado por la ecuación lineal homogénea asociada a (0.13), no se le puede aplicar las iteraciones de Picard para obtener una solución a esta ecuación.

Notación

1. Notaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{S}$ el Schwartz y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) = \mathcal{S}'$ el espacio de la distribuciones temperadas.

2. Notaremos por $H^s(\mathbb{R}^2) = H^s$ el espacio de Sobolev de orden s.

3. Para u variable u operador, notaremos $\langle u \rangle$ a la expresión $(1+u^2)^{\frac{1}{2}}$.

4. Para $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev anisotrópico $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ es definido por
$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in \mathcal{S}' \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^2} (\langle \xi \rangle^{2s_1} + \langle \eta \rangle^{2s_2}) |\widehat{f}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta < \infty \right\}.$$
La norma en este espacio es dada por
$$\|f\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} (\langle \xi \rangle^{2s_1} + \langle \eta \rangle^{2s_2}) |\widehat{f}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta},$$
para toda en f en este espacio. Donde no haya lugar a confusión notaremos a este espacio por H^{s_1,s_2}. Observe que $H^{s,s} = H^s$, con normas equivalentes.

5. Notaremos por D_x^s, D_y^s, J_x^s, J_y^s y J^s a los operadores definidos, vía transformada de Fourier, por
$\widehat{D_x^s f} = |\xi|^s \widehat{f}$
$\widehat{D_y^s f} = |\eta|^s \widehat{f}$
$\widehat{J_x^s f} = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}$
$\widehat{J_y^s f} = (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}$
$\widehat{J^s f} = (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}$
para toda $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

6. Para $s_1, s_2 \geqslant 0$, notamos por $X^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = X^{s_1,s_2}$ al espacio
$$X^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{ f \in H^{s_1,s_2} \mid \partial_x^{-1} f \in H^{s_1,s_2} \}.$$
La norma en este espacio es dada por
$\|f\|^2_{X^{s_1,s_2}} = \|f\|^2_{H^{s_1,s_2}} + \|\partial_x^{-1} f\|^2_{H^{s_1,s_2}}$

7. Para $s_1, s_2 \geqslant 0$, notamos por $\tilde{X}^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \widehat{X}^{s_1,s_2}$ al espacio
$$\tilde{X}^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{ f \in H^{s_1,s_2} \mid \partial_x^{-1} f \in L^2 \}.$$
La norma en este espacio es dada por
$\|f\|^2_{\widehat{X}^{s_1,s_2}} = \|f\|^2_{H^{s_1,s_2}} + \|\partial_x^{-1} f\|^2_{L^2}$

8. Para $s_1, s_2 \geqslant 0$, notamos por $X_\alpha^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = X_\alpha^{s_1,s_2}$ al espacio

$$X_\alpha^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{f \in H^{s_1,s_2} \mid \partial_x^{\frac{\alpha-1}{2}} f \in L^2\}.$$

La norma en este espacio es dada por

$\|f\|^2_{X^{s_1,s_2}} = \|f\|^2_{H^{s_1,s_2}} + \|\partial_x^{-1} f\|^2_{H^{s_1,s_2}}$

9. Para $s_1, s_2 \geqslant 0$, notamos por $Y^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = Y^{s_1,s_2}$ al espacio

$$Y^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{f \in H^{s_1,s_2} \mid \partial_x^{-1}\partial_y f \in H^{s_1,s_2}\}.$$

La norma en este espacio es dada por

$\|f\|^2_{Y^{s_1,s_2}} = \|f\|^2_{H^{s_1,s_2}} + \|\partial_x^{-1}\partial_y f\|^2_{H^{s_1,s_2}}$

10. Para $s_1, s_2 \geqslant 0$, notamos por $\tilde{Y}^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \widehat{Y}^{s_1,s_2}$ al espacio

$$\tilde{Y}^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{f \in H^{s_1,s_2} \mid \partial_x^{-1}\partial_y f \in L^2\}.$$

La norma en este espacio es dada por

$\|f\|^2_{\widehat{Y}^{s_1,s_2}} = \|f\|^2_{H^{s_1,s_2}} + \|\partial_x^{-1}\partial_y f\|^2_{L^2}$

11. Definimos $H^\infty(\mathbb{R}^2) = \bigcap_{s_1,s_2 \geqslant 0} H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$. Análogamente X^∞, $\widehat{X}^\infty$, Y^∞ y $\widehat{Y}^\infty$.

1 Preliminares

1.1. Resultados básicos

Iniciemos este capítulo de preliminares observando, desde ya, que los espacios X^{s_1,s_2}, $\tilde{X}^{s_1,s_2}$, $X_\alpha^{s_1,s_2}$, Y^{s_1,s_2} y $\tilde{Y}^{s_1,s_2}$ son espacios de Hilbert. Gracias al siguiente lema, cada uno de estos espacios es denso en L^2

Lema 1.1. *El espacio $\partial_x\mathcal{S}$ es denso en L^2. Y en general en todos los espacios H^{s_1,s_2}, X^{s_1,s_2}, $\tilde{X}^{s_1,s_2}$, $X_\alpha^{s_1,s_2}$, Y^{s_1,s_2} y $\tilde{Y}^{s_1,s_2}$.*

Demostración. Tómese una función no negativa ϕ definida sobre los reales que sea C^∞, identícamente cero en el interval $[-1/2, 1/2]$ e identícamente igual a 1 fuera del intervalo $[-1, 1]$. Para cualquier $\psi \in \mathcal{S}$ definimos ψ_λ mediante la ecuación

$$\widehat{\psi}_\lambda(\xi, \eta) = \phi(\lambda\xi)\widehat{\psi}(\xi, \eta),$$

para todo $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. El teorema de Plancherel nos muestra que ψ_λ converge a ψ en L^2. Este mismo argumento funciona para cualquiera de los otros espacios que mencionamos en el lema $\partial_x\mathcal{S}$ es denso allí. $\square$

Por argumento de dualidad podemos concluir que los duales de estos espacios contienen a L^2 de manera densa.
Una consecuencia de lo anteriormente discutido es que podemos extender el operador $\partial_x^3 - \mathcal{H}D_x^\alpha\partial_y^2$ a todo L^2 con imagen en el dual de X^3, $(X^3)^*$. En efecto, este operador es continuo de este espacio en L^2, luego su operador adjunto es continuo. Gracias a la transformada de Fourier, se puede ver que este operador adjunto es una extensión de $\partial_x^3 - \mathcal{H}D_x^\alpha\partial_y^2$ a todo L^2. Como corolario tenemos el siguiente lema.

Lema 1.2. *Sea W_α el grupo unitario de operadores generado por el operador $\partial_x^3 - \mathcal{H}D_x^\alpha\partial_{yy}^2$ y sean f y u funciones continuas de un intervalo abierto I en L^2. Entonces*

$$u = W_\alpha(t)\psi + \int_0^t W_\alpha(t-t')f(t')\,dt'$$

si, y sólo si u tiene derivada continua en I en $(X^3)^*$, el dual del espacio X^3, y

$$\partial_t u = \partial_x^3 u - \mathcal{H}D_x^\alpha\partial_y^2 u + f. \tag{1.1}$$

Ésto le da sentido a los teoremas de buen planteamiento en H^{s_1,s_2} que enunciaremos más adelante cuando α es negativo.
El siguiente es un lema técnico que usaremos más adelante.

Lema 1.3. *Supongamos que u y f son funciones continuas en el espacio L^2 que satisfacen* (1.1) *en el sentido anteriormente descrito. Entonces,*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = (u, f). \tag{1.2}$$

Demostración. Sean $u_\lambda = e^{\lambda(\triangle - D_x^{-1})}(u)$ y f_λ es definida de la misma manera. u_λ y f_λ están X^∞ y convergen uniformemente, cuando λ tiende a 0, en intervalos cerrados a u y f en L^2. Además, satisfacen la ecuación (1.1). De la antisimetría del operador $\partial_x^3 - \mathcal{H}D_x^\alpha\partial_y^2$, se ve fácilmente que u_λ y f_λ satisfacen (1.2). Al hacer λ tender a 0 se sigue el lema □

A continuación enunciamos una serie de resultados acerca de las propiedades de los espacios que trabajaremos en este trabajo. Quizás uno de los más conocidos es el lema de Sobolev. Aquí presentamos la versión para los espacios $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$.

Lema 1.4 (Sobolev)**.** *Sean s_1 y s_2 son números reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \subset C_\infty(\mathbb{R}^2)$ (el conjunto de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ que se anulan en infinito), con inclusión continua.*

Demostración. Ver [33] □

Lema 1.5. *Sean $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ y $f \in L^p \cap L^q$. Entonces $f \in L^r$ para $r = \theta p + (1-\theta)q$ donde $\theta \in (0,1)$ y se tiene*

$$\|f\|_{L^r}^r \leqslant \|f\|_{L^p}^{\theta p}\,\|f\|_{L^q}^{(1-\theta)q}$$

Demostración. La prueba es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder. □

Lema 1.6. *Si $s \in (0, n/2)$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ esta continuamente inmerso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $p = \frac{2n}{n-2s}$, es decir $s = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$. Más aún, con $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, n/2)$*

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_{n,s}\,\|D^s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\,\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

donde

$$D^l f = (-\Delta)^{l/2} = ((|\xi|)^l \hat{f})^\vee$$

Demostración. Vea el libro de Linares y Ponce [27] página 48. □

Lema 1.7. *Sean $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, supongamos que $D^{s_1}f \in L^p(\mathbb{R})$ y $D^{s_2}f \in L^q(\mathbb{R})$. Entonces, para todo $\theta \in [0,1]$, $D^s f \in L^r$, y*

$$\|D^s f\|_{L^r(\mathbb{R})} \leqslant C_s \|D^{s_1} f\|_{L^p(\mathbb{R})}^\theta \|D^{s_2} f\|_{L^q(\mathbb{R})}^{1-\theta}$$

donde $\theta = \dfrac{s_2 - s}{s_2 - s_1}$ *y* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demostración. Una demostración puede encontrarse en [28] □

La siguiente estimativa fue probada por Kato y Ponce en [14] y será muy útil en este trabajo.

Lema 1.8. *Para $s > 0$ y $1 < p < \infty$, se tiene que*

$$\|[J^s, f]g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\partial f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|J^{s-1}g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|J^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.3}$$

para toda f y $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Corolario 1.9. *Para $s > 0$ y $p \in (1\,\infty)$, $L^p_s \cap L^\infty$ es un álgebra, además*

$$\|fg\|_{L^p_s} \leqslant c(\|f\|_\infty\|g\|_{L^p_s} + \|f\|_{L^p_s}\|g\|_\infty) \tag{1.4}$$

La siguiente estimativa del operador conmutador puede ser vista en [27] página 51

Lema 1.10. *Para $s > 0$, se tiene que*

$$\|[\partial_x^s, g]\, f\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim \|\partial_x g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\|\partial_x^{s-1} f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x^s g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{1.5}$$

La siguiente es la regla de Leibniz para derivadas fraccionarias y fue demostrada por Kenig, Ponce y Vega en [17]

Lema 1.11. *Para $\alpha \in (0, 1)$, se tiene*

$$\|D_x^\alpha(fg)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \|D_x^\alpha(f)\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \|g\|_{L^{q_1}(\mathbb{R})} + \|D_x^\alpha g\|_{L^{p_2}(\mathbb{R})} \|f\|_{L^{q_2}(\mathbb{R})} \tag{1.6}$$

donde $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leqslant \infty$ y satisfacen $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{p}$.

Lema 1.12. *Sean $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$ y $0 \leqslant p \leqslant \frac{8}{1-\alpha}$*

$$\|f\|^{p+2}_{L^{p+2}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|f\|^{2-\frac{p(1-\alpha)}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\partial_x f\|^{\frac{p(3-\alpha)}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_x^{\frac{\alpha-1}{2}} \partial_y f\|^{\frac{p}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Demostración. Probaremos el lema primero para $p = p* = \frac{8}{1-\alpha}$. Por los Lemas 1.6 y 1.7 se tiene

$$\begin{aligned}
\|f\|^{p^*+2}_{L^{p^*+2}(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^{p^*+2} dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot,y)\|^{p^*+2}_{L_x^{p^*+2}} dy \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}} \left\| D_x^{\frac{p^*}{p^*+2}} f(\cdot,y)\right\|^{p^*+2}_{L^2_x} dy \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}} \|\partial_x f(\cdot,y)\|^2_{L^2_x} \left\| D_x^{\frac{p^*-4}{2p^*}} f(\cdot,y)\right\|^{p^*}_{L^2_x} dy \\
&\leqslant C \,\|\partial_x f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\| D_x^{\frac{p^*-4}{2p^*}} f(x,y)\right\|^{p^*}_{L^2_x}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Por otro lado, para toda $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^{\frac{p^*-4}{2p^*}} f(\cdot, y) \right\|_{L_x^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| D_x^{\frac{p^*-4}{2p^*}} f(x,y) \right|^2 dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} D_x^{\frac{1+\alpha}{4}} f(x,t) D_x^{\frac{1+\alpha}{4}} \partial_y f(x,t) dt dx \\
&= 2 \int_{-\infty}^{y} \int_{\mathbb{R}} D_x f(x,t) D_x^{\frac{\alpha-1}{2}} \partial_y f(x,t) dx dt \\
&\leqslant 2 \int_{-\infty}^{y} \|\partial_x f(\cdot,t)\|_{L_x^2} \left\| D_x^{\frac{\alpha-1}{2}} \partial_y f(\cdot,t) \right\|_{L_x^2} dt \\
&\leqslant 2 \|\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\| D_x^{\frac{\alpha-1}{2}} \partial_y f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{L^{p^*+2}(\mathbb{R}^2)}^{p^*+2} \leqslant c \|\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{p^*(3-\alpha)}{4}} \|D_x^{\frac{\alpha-1}{2}} \partial_y f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{p^*}{2}} \tag{1.9}$$

La desigualdad para $0 < p < p^*$ sigue imediatamente del Lema 1.5 y esta última desigualdad.

□

1.2. Teoría de Kato

Haremos una breve presentación de la Teoría de Kato descrita en [11]. Con ésta se demuestra el buen planteamiento de problemas de Cauchy de ecuaciones lineales y cuasilineales de evolución.

1.2.1. Caso lineal

Supongamos que X e Y son espacios de Banach reflexivos con $Y \subseteq X$ de forma densa y continua, y sea $\{A(t)\}_{t \in [0,T]}$ una familia de operadores tales que

1. $A(t) \in G(X, 1, \beta)$. En otras palabras, $-A(t)$ genera un C_0 semigrupo tal que

   $$\|e^{-sA(t)}\| \leqslant e^{\beta s},$$

   para todo $s \in [0, \infty)$.

2. Existe un isomorfismo $S : Y \to X$ tal que $SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t)$, donde $B(t) \in B(X)$, para $0 \leqslant t \leqslant T$, $t \to B(t)x$ es fuertemente medible, para cada $x \in X$, y $t \to \|B(t)\|_X$ es integrable en $[0, T]$.

3. $Y \subseteq D(A(t))$, para $0 \leqslant t \leqslant T$, y $t \to A(t)$ es fuertemente continuo de $[0, T]$ a $B(Y, X)$

Teorema 1.13. *Bajo las anteriores condiciones, existe una familia de operadores* $\{U(t,s)\}_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ *tales que:*

1. U *es fuertemente continuo de* $\Delta \to B(X)$*, donde* $\Delta = \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$.
2. $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ *para* (t,s) *y* $(s,r) \in \Delta$*, y* $U(s,s) = I$.
3. $U(t,s)Y \subset Y$ *y* U *es fuertemente continuo de* $\Delta \to B(Y)$.
4. $\dfrac{dU(t,s)}{dt} = -A(t)U(t,s)$, $\dfrac{dU(t,s)}{ds} = U(t,s)A(s)$, *en el sentido fuerte dentro del espacio* $B(X,Y)$ *y son fuertemente continuas de* $\Delta \to B(X,Y)$.

La familia de operadores $\{U(t,s)\}_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}$ en el teorema anterior es denominada *familia de operadores de evolución* asociada a $A(t)$. Una consecuencia inmediata de este último teorema es que, para $\varphi \in Y$, $u(t) = U(t,s)\varphi$ es solución del problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = 0 \qquad \text{para } s \leqslant t \leqslant T, \text{ con}$$
$$u(s) = \varphi.$$

Más aún, si $f \in C([0,T];X) \cap L^1([0,T];Y)$, entonces

$$u(t) = U(t,0)\varphi + \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

si y sólo si $u \in C([0,T];Y) \cap C^1((0,T);X)$ y

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t) \quad \textit{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \textit{con}$$
$$u(0) = \varphi.$$

1.2.2. Caso Cuasilineal

Sean X e Y espacios de Banach reflexivos, $Y \subseteq X$, siendo la inclusión densa y continua. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\partial_t u + A(t,u)u = f(t,u) \in X, \ 0 < t, \\ &u(0) = u_0 \in Y, \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde, para cada t, $A(t,u)$ es un operador lineal de Y en X y $f(t,u)$ es una función de $\mathbb{R} \times Y$ en X. Consideremos también las siguientes condiciones:
(X) Existe un isomorfismo isométrico S de Y en X.
Existen $T_0 > 0$ y W bola abierta de centro w_0 tales que:
(A_1) Para cada $(t,y) \in [0,T_0] \times W$, el operador lineal $A(t,y)$ pertenece a $G(X,1,\beta)$, donde β es un número real positivo. En otras palabras, $-A(t,y)$ genera un C_0 semigrupo tal que

$$\|e^{-sA(t,y)}\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant e^{\beta s}, \text{ para } s \in [0,\infty).$$

Nótese que si X es un espacio de Hilbert, $A \in G(X,1,\beta)$ si, y sólo si,

a) $\langle Ay, y\rangle_X \geqslant -\beta\|y\|_X^2$ para todo $y \in D(A)$,

b) $(A+\lambda)$ es sobre para todo $\lambda > \beta$.

(Ver [13] o [32])
(A_2) Para cada $(t, y) \in [0, T_0] \times W$ el operador $B(t, y) = [S, A(t, y)]S^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ y es uniformemente acotado, es decir, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\|B(t, y)\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \lambda_1 \quad \text{para todo } (t, y) \in [0, T_0] \times W,$$

Además, para algún $\mu_1 > 0$, se tiene que, para todo y y $z \in W$,

$$\|B(t, y) - B(t, z)\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \mu_1 \|y - z\|_Y.$$

(A_3) $Y \subseteq D(A(t, y))$, para cada $(t, y) \in [0, T_0] \times W$, (la restricción de $A(t, y)$ a Y pertenece a $\mathcal{B}(Y, X)$) y, para cada $y \in W$ fijo, $t \to A(t, y)$ es fuertemente continua. Además, para cada $t \in [0, T_0]$ fijo, se satisface la siguiente condición de Lipschitz,

$$\|A(t, y) - A(t, z)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leqslant \mu_2 \|y - z\|_X,$$

donde $\mu_2 \geqslant 0$ es una constante.
(A_4) $A(t, y)w_0 \in Y$ para todo $(t, y) \in [0, T] \times W$. Además, existe una constante λ_2 tal que

$$\|A(t, y)w_0\|_Y \leqslant \lambda_2, \quad \text{para toda } (t, y) \in [0, T_0] \times W$$

(f_1) f es una función acotada en $[0, T_0] \times W$ a Y, es decir, existe λ_3 tal que

$$\|f(t, y)\|_Y \leqslant \lambda_3, \quad \text{para todo } (t, y) \in [0, T_0] \times W,$$

Además, la función $t \in [0, T_0] \mapsto f(t, y) \in Y$ es continua con respecto a la topología de X y para todo y y $z \in Y$ se tiene que

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_X \leqslant \mu_3 \|y - z\|_X,$$

donde $\mu_3 \geqslant 0$ es una constante.

Teorema 1.14 (Kato)**.** *Suponga que las condiciones* (X), $(A_1) - (A_4)$ *y* (f_1) *son satisfechas. Dado* $u_0 \in Y$*, existe* $0 < T < T_0$ *y una única* $u \in C([0, T]; Y) \cap C^1((0, T); X)$ *solución de* (1.10)*. Además, la aplicación* $u_0 \to u$ *es continua en el siguiente sentido: considere la sucesión de problemas de Cauchy,*

$$\begin{aligned} &\partial_t u_n + A_n(t, u_n)u_n = f_n(t, u_n) \quad t > 0 \\ &u_n(0) = u_{n_0} \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Supongamos que las condiciones (X), (A_1)–(A_4) y (f_1) son satisfechas para todo $n \geqslant 0$ en (1.11)*, con los mismos X, Y y S, y las correspondientes β, λ_1–λ_3, μ_2–μ_3 pueden ser escogidas independientes de n. También supongamos que*

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n(t,w) &= A(t,w) \text{ en } B(X,Y) \\ s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n(t,w) &= B(t,w) \text{ en } B(X) \\ \lim_{n\to\infty} f_n(t,w) &= f(t,w) \text{ en } Y \\ \lim_{n\to\infty} u_{n_0} &= u_0 \text{ en } Y, \end{aligned}$$

donde s-lím *denota el límite fuerte. Entonces, T puede ser elegido de tal manera que $u_n \in C([0,T],Y) \cap C^1((0,T),X)$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

Para una demostración de este teorema puede ver [11] y [20].

1.3. Otros resultados

Proposición 1.15 (Desigualdad de Kato)**.** *Sean $f \in H^s$, $s > 2$, $\Lambda = (1-\Delta)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces, para $|\tilde{t}|, |\tilde{s}| \leqslant s-1$, $\Lambda^{-\tilde{s}}[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\tilde{t}} \in B(L^2(\mathbb{R}^2))$ y*

$$\left\|\Lambda^{-\tilde{s}}[\Lambda^{\tilde{s}+\tilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\tilde{t}}\right\|_{\mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}^2))} \leqslant c\,\|\nabla f\|_{H^{s-1}}\,, \tag{1.12}$$

Proposición 1.16. *sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua acotada tal que $\partial_x f$ existe, es continua y acotada. Entonces, si $A = f\partial_x$,*

$$\langle A(u), u\rangle_{L^2} \geqslant -\frac{1}{2}||\partial_x f||_{L^\infty}||u||^2_{L^2}, \tag{1.13}$$

para cada $u \in D(A)$, $A+\lambda$ es sobre, para todo $\lambda > \frac{1}{2}||f||_{L^\infty}$. En particular, $A \in G\left(L^2\left(\mathbb{R}^2\right), 1, \frac{1}{2}||f||_{L^\infty}\right)$

Demostración. La desigualdad 1.13 se obtiene inmediatamente después de hacer integración por partes. Veamos que $A+\lambda$ es sobre, si $\lambda > \frac{1}{2}||f||_{L^\infty}$. Supongamos que ψ es tal que $\langle (A+\lambda)(u), u\rangle_{L^2} = 0$, para todo $u \in D(A)$. Por lo tanto $\psi \in D(A^*) \subseteq D(A)$. De 1.13, se sigue que

$$0 \geqslant \langle (a+\lambda)(u), u\rangle_{L^2} \geqslant (\lambda - \frac{1}{2}||f||_{L^\infty})||\psi||^2_{L^2}.$$

Luego, $\psi = 0$ y, por lo tanto, $A+\lambda$ es sobre. □

2 Buen planteamiento en los espacios $H^s(\mathbb{R}^2)$

En este capítulo examinaremos el buen planteamiento de (0.13) en los espacios de Sobolev H^s, X^s, $\tilde{X}^s_\alpha$, Y^s y $\tilde{Y}^s$, para $s > 2$.

2.1. Buen planteamiento en los espacios $H^s(\mathbb{R}^2)$

En esta sección haremos uso de la teoría de Kato para mostrar el buen planteamiento de (0.13) en los espacios H^s. Más precisamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sean s y α números reales tales que $s > 2$ y $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Para $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existe $T > 0$, que depende solamente de $\|\psi\|_{H^s}$, y una única $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T], H^{s-3}(\mathbb{R}^2) \cap \tilde{(X^3)}*)$ solución del problema de Cauchy* (0.13)
Además, la transformación $\psi \to u$ de H^s en $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2))$ es continua.

Demostración. Sea $W_\alpha(t)$ el grupo de operadores definido por

$$W_\alpha(t)\psi = e^{t(\partial_x^3 - \mathscr{H}\partial_y^2)}\psi = \left(e^{-it(\xi^3 + \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha \eta^2)}\widehat{\psi}\right)^\vee,$$

para toda $\psi \in H^s$. u es solución de la ecuación (0.13) si y sólo si $v = W_\alpha(t)u$ es solución del problema

$$\begin{cases} v_t + A(t,v)v = 0 \\ v(0) = \psi, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $A(t,v) = W_\alpha(t)(W_\alpha(-t)v)\partial_x W_\alpha(-t)$. Veamos que este problema satisface cada una de las condiciones del teorema de Kato 1.14.
Sean $X = L^2(\mathbb{R}^2)$, $Y = H^s(\mathbb{R}^2)$ y $S = \Lambda_s = J^s$. Del teorema de Plancherel, es evidente que S isomorfismo entre X e Y
Con los siguientes lemas probaremos que se satisfacen las condiciones (A_1)-(A_4)

Lema 2.2. *$A(t,v) \in G(X, 1, \beta(v))$, donde $\beta(v) = \frac{1}{2}\sup_t \|\partial_x W_\alpha(t)v\|_{L^\infty}$*

Demostración. Ya que $\{W_\alpha(-t)\}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios y que $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$, de la Proposición 1.16, se obtiene el resultado $\square$

Lema 2.3. *Para S dado como antes,*

$$SA(t,v)S^{-1} = A(t,v) + B(t,v),$$

donde $B(t,v)$ es un operador acotado en L^2, para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $v \in H^s$, y satisface las desigualdades

$$||B(t,v)||_{\mathcal{B}(L^2)} \leqslant \lambda(v) \tag{2.2}$$

$$||B(t,v) - B(t,v')||_{\mathcal{B}(L^2)} \leqslant \mu||v - v'||_{H^s} \tag{2.3}$$

para $t \in \mathbb{R}$ y todos v y $v' \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Donde μ es un número positivo y

$$\lambda(v) = \sup_t C_s\|v\|_{H^s}.$$

Demostración. Del Lema 1.15, se sigue que $[S, W_\alpha(-t)v]S^{-1} \in \mathcal{B}(L^2)$ y

$$\|[S, W_\alpha(-t)v]S^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2)} \leqslant C_s\|v\|_{H^s}.$$

Por lo tanto $B(t,v) \in \mathcal{B}(L^2)$ y satisface (2.2)
Al proceder como antes se muestra (2.3) □

Lema 2.4. *$H^s(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t,v))$ y $A(t,v)$ es un operador acotado de $Y = H^s(\mathbb{R}^2)$ en $X = L^2(\mathbb{R}^2)$ con*

$$\|A(t,v)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leqslant \|v\|_{H^s},$$

para todo $v \in Y$. Además, la función $t \mapsto A(t,v)$ es fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{B}(Y,X)$, para cada $v \in H^s$. Por otro lado, la función $v \mapsto A(t,v)$ satisface la siguiente condición de Lipschitz

$$\|A(t,v) - A(t,v')\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leqslant \|v - v'\|_X,$$

donde μ es como en el lema anterior.

Demostración. Puesto que $\{W_\alpha(t)\}$ es un grupo unitario en L^2, de la definición de $A(t,v)$, se sigue que $H^s(\mathbb{R}^2) \subset D(A(t,v))$. De hecho,

$$\begin{aligned}\|A(t,v)f\|_{L^2} &= \|W_\alpha(-t)v\partial_x W_\alpha(-t)f\|_{L^2} \\ &\leqslant C_s\|v\|_{H^s}\|\partial_x f\|_{L^2} \\ &\leqslant \|v\|_{H^s}\|f\|_{H^s}\end{aligned}$$

para toda $f \in H^s$.
Ahora, para cada $t, t' \in \mathbb{R}$ y cada $f, v \in H^s$, tenemos

$$\begin{aligned}\|A(t,v)f - A(t',v)f\|_{L^2} \leqslant{}& \|\left(W_\alpha(t) - W_\alpha(t')\right)W_\alpha(-t)v\partial_x W_\alpha(-t)f\|_{L^2} + \\ &+ \|(W_\alpha(-t) - W_\alpha(-t'))v\partial_x W_\alpha(-t)f\|_{L^2} + \\ &+ \|W_\alpha(-t')v\partial_x(W_\alpha(-t) - W_\alpha(-t'))f\|_{L^2}\end{aligned}$$

Como el grupo $\{W_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continuo, $t \mapsto A(t,v)$ es fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{B}(H^s, L^2)$. Finalmente, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|A(t,v)f - A(t,v')f\|_{L^2} &\leqslant \mu\|W_\alpha(-t)v - W_\alpha(-t)v'\|_{L^2}\|\partial_x W_\alpha(-t)f\|_{L^\infty}\\ &\leqslant \mu\|v-v'\|\,\|f\|_{H^s}\end{aligned}$$

esto termina la demostración del lema. □

Si tomamos W la bola abierta de los $v \in H^s$ tales que $\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} < R$ los lemas anteriores muestran que el problema de Cauchy (0.13) satisface las condiciones del Teorema 1.14. Por lo tanto, para cada $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, con $s > 2$, existen $T > 0$, que depende de $\|\psi\|_{H^s}$, y una única $v \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^2))$ solución del problema (2.1). Además, la aplicación $\psi \to v$ es continua de $H^s(\mathbb{R}^2)$ en $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2))$. Ahora bien, de las propiedades del grupo $W_\alpha(t)$ se puede verificar que $u(t) = W_\alpha(-t)v$, es solución del problema de Cauchy (0.13) y satisface las propiedades enunciadas en el teorema. □

Teorema 2.5. *El tiempo de existencia para la solución del problema de Cauchy* (0.13) *puede ser elegido independiente de s en el siguiente sentido: si $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2))$ es la solución de* (0.13) *con $\psi \in H^r(\mathbb{R}^2)$, para algunos $r > s$, entonces $u \in C([0,T], H^r(\mathbb{R}^2))$.*
En particular, si $\psi \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$, $u \in C([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^2))$

Demostración. Sean $r > s$, $u \in C([0,T], H^r(\mathbb{R}^2))$, solución de (0.13) y $v = W_\alpha(-t)u$. Supongamos que $r \leqslant s+1$. Si aplicamos ∂_x^2 en ambos lados de la ecuación diferencial (2.1), llegamos a la siguiente ecuación de evolución lineal para $w(t) = \partial_x^2 v(t)$

$$\frac{dw}{dt} + A(t)w + B(t)w = 0 \tag{2.4}$$

donde

$$A(t) = \partial_x W_\alpha(t)u(t)W_\alpha(-t) \tag{2.5}$$

$$B(t) = 2W_\alpha(t)u_x(t)W_\alpha(-t). \tag{2.6}$$

Como $v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$, entonces $w \in C([0,T]; H^{s-2}(\mathbb{R}^2))$. Además $w(0) = \psi_{xx} \in H^{r-2}(\mathbb{R}^2)$ porque $\psi \in H^r(\mathbb{R}^2)$. Es necesario ver que $w \in C([0,T]; H^{r-2}(\mathbb{R}^2))$, para ésto probaremos que el problema de Cauchy para la ecuación lineal (2.4) está bien planteado para $1-s \leqslant k \leqslant s-1$, para lo cual tenemos el siguiente lema cuya demostración es similar a la del Lema 3.1 en [12]

Lema 2.6. *La familia $\{A(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ tiene una única familia de operadores de evolución asociada, $\{U(t,\tau)\}_{0\leqslant t\leqslant \tau\leqslant T}$, en los espacios $X = H^h$, $Y = H^k$, donde*

$$-s \leqslant h \leqslant s-2 \quad 1-s \leqslant k \leqslant s-1 \quad k+1 \leqslant h \tag{2.7}$$

En particular, $U(t,\tau) : H^r \to H^r$ para $-s \leqslant s \leqslant s-1$.

Luego, w satisface la ecuación

$$w(t) = U(t,0)\psi_{xx} + \int_0^t U(t,\tau)[-B(\tau)w(\tau) + f(\tau)]\, d\tau. \tag{2.8}$$

Como $\psi_{xx} \in H^{r-2}$, $B(t)$, dada por (2.6), es una familia de operadores en H^{r-2} que es fuertemente continuo para t en el intervalo $[0,T]$. Del Lema 2.6 la solución de (2.8) está en $C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. En otras palabras $\partial_x^2 u \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$
Si $w_1(t) = \partial_x \partial_y v(t)$, tenemos

$$\frac{dw_1}{dt} + A(t)w_1 + B_1(t)w_1 = f_1(t) \tag{2.9}$$

donde

$$B_1(t) = \mathcal{W}(t)u_x(t)\mathcal{W}(-t) = \frac{1}{2}B(t) \tag{2.10}$$

$$f_1(t) = -\mathcal{W}(t)\left(u_{xx}(t)u_y(t)\right) \tag{2.11}$$

Como antes tenemos que

$$w_1(t) = U(t,0)\psi_{xy} + \int_0^t U(t,\tau)(-B_1(\tau)w_1(\tau) + f_1(\tau))\, d\tau \tag{2.12}$$

Ya que $u_{xx} \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, $f_1 \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. Dado que además, $B_1(t) \in \left(H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ es fuertemente continuo en el intervalo $[0,T]$, argumentando como antes tenemos que $w_1 \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, o lo que es equivalente $u_{xy} \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$.
Analogamente, si $w_2(t) = \partial_y^2 v(t)$, tenemos que

$$\frac{dw_2}{dt} + A(t)w_2 = f_2(t) \tag{2.13}$$

donde

$$f_2(t) = -2\mathcal{W}(t)(u_{xy}u_y(t) \tag{2.14}$$

$$w_2(t) = U(t,0)\psi_{yy} + \int_0^t U(t,\tau)f_2(\tau)\, d\tau. \tag{2.15}$$

Ya que $u_{xy} \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, $f_2 \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. Repitiendo el argumento anterior, podemos concluir que $w_2 \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, o equivalentemente, $\partial_y^2 u \in C\left([0,T]; H^{r-2}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$.
Luego, hemos mostrado que si $s < r \leqslant s+1$ y $\psi \in H^r$, $u \in C\left([0,T]; H^r\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. para ver el caso $r > s+1$, como $\psi \in H^{s'}$, para $s' < r$, usando una y otra vez lo que hemos probado hasta ahora, se llega a que $u \in C\left([0,T]; H^r\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ $\square$

2.2. Buen planteamiento en X^s, $\tilde{X}^s_\alpha$ y Y^s

Finalicemos esta sección probando el buen planteamiento de (0.13) en los espacios X^s, $\tilde{X}^s_\alpha$ y Y^s.

Teorema 2.7. *Sean s y α como en Teorema 2.1. Sea, asimismo, Z cualquiera de los espacios X^s, $\widehat{X}^s$, $\tilde{X}^s_\alpha$, Y^s y $\widehat{Y}^s$,. Entonces, si $\psi \in Z$ y $u \in C([0,T],H^s)$ es solución de (0.13) con $u(0)=\psi$, entonces $u \in C([0,T],Z)$. Más aún, $\psi \mapsto u$ es continua de Z en $C([0,T],Z)$*

Demostración. Supongamos que ψ y u son como en las hipótesis del teorema. Entonces, del teorema fundamental del cálculo, se tiene que

$$u(t) = W_\alpha(-t)\psi + \int_0^t W_\alpha(-t+\tau)\partial_x\left(\frac{u^2(\tau)}{2}\right)\,d\tau.$$

Así pues,

$$\partial_x^{-1}u(t) = W_\alpha(-t)\partial_x^{-1}\psi + \int_0^t W_\alpha(-t+\tau)\left(\frac{u^2(\tau)}{2}\right)\,d\tau.$$

De aquí se sigue que (0.13) es bien planteado en los espacios $\widehat{X}^s$ y X^s.
Por otro lado,

$$\partial_x^{-1}\partial_y u(t) = W_\alpha(-t)\partial_x^{-1}\partial_y\psi + \int_0^t W_\alpha(-t+\tau)(u\partial_y u)(\tau)\,d\tau.$$

De aquí se sigue que (0.13) es bien planteado en el espacio $\widehat{Y}^s$. Para ver que es bien planteado en Y^s es ligeramente más complicado. Sea v como en (2.1). Entonces, $w = \partial_x^{-1}\partial_y v$ satisface

$$\begin{cases} w_t + A(t,v)w = 0 \\ w(0) = \partial_x^{-1}\partial_y\psi, \end{cases} \tag{2.16}$$

donde $A(t,v)$ es como en (2.1). Del caso lineal de la teoría de Kato, más específicamente del Teorema 1.14, al tomar $X = L^2$ y $Y = H^s$, se tiene que, si $\partial_x^{-1}\partial_y\psi \in H^s$, w es continua en t y depende continuamente del dato inicial. De la manera que tomamos w se sigue que u satisface lo mismo. Ésto demuestra el buen planteamiento de (0.13) en Y^s.
De manera totalmente análoga se muestra que (0.13) es bien planteado en el espacio X^s_α. $\square$

3 Buen planteamiento en espacios de baja regularidad

En este capítulo examinamos el buen planteamiento de la ecuación (0.13) en $X^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, para $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $s_1 > \frac{17}{12} - \frac{\alpha}{4}$ y $1 < s_2 \leqslant s_1$. Usaremos las propiedades dispersivas del grupo generado por el flujo de la ecuación lineal asociada a (0.13). Esta es la misma estrategia usada por Kenig en [15] para la ecuación KP-I y por Linares, Pilod y Saut en [26] para las f-KPI y f-KPII.

3.1. Estimativas lineales

El problema de Cauchy lineal asociada al problema (0.13) es

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \mathcal{H}D_x^\alpha u_{yy}, \\ u(0) = \psi. \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. El grupo unitario generado por este problema es

$$W_\alpha(t)\psi(x,y) = \left(e^{-it(\xi^3+\operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha\eta^2)}\widehat{\psi}\right)^\vee = S_t^\alpha * \psi(x,y), \tag{3.2}$$

donde

$$S_t^\alpha(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it(\xi^3+\operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha\eta^2)+ix\xi+iy\eta}d\xi d\eta \tag{3.3}$$

Examinemos las propiedades de este grupo.

Lema 3.1. *Sean $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$ y $\frac{\alpha}{2} - 1 < \operatorname{Re}\beta < \frac{\alpha}{2}$. Entonces,*

$$\left\|D_x^\beta W_\alpha(t)\psi\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim |t|^{-\frac{5+2\beta-\alpha}{6}} \left\|\psi\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.4}$$

Demostración. Efectivamente,

$$
\begin{aligned}
D_x^\beta S_t^\alpha(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^\beta\, e^{-it(\xi^3+\operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha\eta^2)+ix\xi+iy\eta} d\xi d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}_\xi} |\xi|^\beta\, e^{-it\xi^3+ix\xi} \int_{\mathbb{R}_\eta} e^{-it\operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha\eta^2+iy\eta} d\eta d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}_\xi} |\xi|^\beta\, e^{-it\xi^3+ix\xi+\frac{i\operatorname{sgn}(\xi)y^2}{4t|\xi|^\alpha}} \int_{\mathbb{R}_\eta} e^{-i|t|\operatorname{sgn}(t\xi)|\xi|^\alpha\left[\eta-\frac{y}{2t\operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha}\right]^2} d\eta d\xi \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{|t|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi^3+ix\xi+\frac{i\operatorname{sgn}(\xi)y^2}{4t|\xi|^\alpha}-i\operatorname{sgn}(t\xi)\frac{\pi}{4}}\, |\xi|^{\beta-\frac{\alpha}{2}}\, d\xi \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{|t|^{\frac{5+2\beta-\alpha}{6}}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\theta^3-x\theta t^{-\frac{1}{3}}-\frac{\operatorname{sgn}(\theta)y^2}{4|\theta|^\alpha}|t|^{\frac{\beta}{3}-1}\right)} |\theta|^{\beta-\frac{\alpha}{2}} d\theta.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Veamos que la última integral es acotada. Para ésto tomemos una función χ definida en todo $\mathbb{R}$, infinitamente diferenciable, con soporte en el intervalo $[-2,2]$ y tal que $\chi \equiv 1$ en el intervalo $[-1,1]$. Así pues

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\theta^3-x\theta t^{-\frac{1}{3}}-\frac{\operatorname{sgn}(\theta)y^2}{4|\theta|^\alpha}|t|^{\frac{\beta}{3}-1}\right)} |\theta|^{\beta-\frac{\alpha}{2}} d\theta = \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\theta^3-x\theta t^{-\frac{1}{3}}-\frac{\operatorname{sgn}(\theta)y^2}{4|\theta|^\alpha}|t|^{\frac{\beta}{3}-1}\right)} |\theta|^{\beta-\frac{\alpha}{2}} \chi(\theta) d\theta + \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(\theta^3-x\theta t^{-\frac{1}{3}}-\frac{\operatorname{sgn}(\theta)y^2}{4|\theta|^\alpha}|t|^{\frac{\beta}{3}-1}\right)} |\theta|^{\beta-\frac{\alpha}{2}} (1-\chi(\theta)) d\theta.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Claramente la primera integral es acotada. Para ver que la segunda integral es acotada, haremos uso del lema de Van der Corput (Vea [27], Corolario 1.1). Las segunda y tercera derivadas de función de fase $\vartheta_\alpha(\theta) = \theta^3 - x\theta t^{-\frac{1}{3}} - \frac{\operatorname{sgn}(\theta)y^2}{4|\theta|^\alpha}|t|^{\frac{\beta}{3}-1}$ en la integral son

$$
\begin{aligned}
\vartheta''_\alpha(\theta) &= 6\theta + \operatorname{sgn}(\theta)\alpha(\alpha+1)\frac{y^2\,|t|^{\frac{\beta}{3}-1}}{4}\,|\theta|^{-\alpha-2} \\
\vartheta'''_\alpha(\theta) &= 6 + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\frac{y^2\,|t|^{\frac{\beta}{3}-1}}{4}\,|\theta|^{-\alpha-3}
\end{aligned}
$$

Se comprueba fácilmente que, para $|\theta| \geqslant 1$, $|\vartheta''_\alpha(\theta)| \geqslant 6$ cuando $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$ y que $|\vartheta'''_\alpha(\theta)| \geqslant 6$ cuando $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Como la función $\theta \mapsto |\theta|^{\beta-\frac{\alpha}{2}}(1-\chi(\theta))$ es acotada uniformemente e integrable en el conjunto $|\theta| \geqslant 1$, se verifica que la segunda integral en el lado derecho de (3.6) es acotada. Lo que verifica que la última integral en (3.5) es uniformemente acotada. Por lo tanto,

$$
\|D_x^\beta S_t^\alpha(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim |t|^{\frac{5+2\beta-\alpha}{6}}
$$

El teorema sigue inmediatamente de la desigualdad de Young para la convolución. $\square$

Observación 1. El resultado anterior coincide con lo que demuestran Linares y Pastor en [23] para la ecuación ZK (caso $\alpha = 1$). Los resultados de Saut en [34] para la ecuación KPI (caso $\alpha = -1$) y de Lizarazo en su tesis (vea [28]) (caso $\alpha = 0$) son mejores estimativas.

Corolario 3.2. *Sean* $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 < \epsilon < 1$ *y* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. *Entonces,*

$$\left\| D_x^{\theta\left(\frac{\alpha}{2}-\epsilon\right)} W_\alpha(t)\psi \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant |t|^{-\frac{\theta(5-2\epsilon)}{6}} \|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \tag{3.7}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *y* $p = \frac{2}{1-\theta}$.

Demostración. Sea $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. El teorema sigue del teorema de interpolación de familias de operadores analíticos de Stein (veáse [35]). Hagamos $z = \theta + i\gamma \in \mathbb{C}$. Para cada z definimos los operadores T^z por

$$T_z\psi = D_x^{z(\frac{\alpha}{2}-\epsilon)} W_\alpha(t)\psi.$$

Esta familia $\{T_z\}$ es una familia admisible de operadores. Del Lema 3.1, tenemos

$$\|T_{1+i\gamma}\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \left\| D_x^{(\frac{\alpha}{2}-\epsilon)(1+i\gamma)} W_\alpha(t)\psi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\,|t|^{-(\frac{5-2\epsilon}{6})} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \tag{3.8}$$

Además, $\{W_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo fuertemente continuo en el parámetro t en $L^2(\mathbb{R}^2)$ se tiene

$$\|T_{i\gamma}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left\| D_x^{(\frac{\alpha}{2}-\epsilon)(i\gamma)} W_\alpha(t)\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{3.9}$$

Del interpolación de Stein se obtiene

$$\|T_\theta\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\,|t|^{-\theta(\frac{5-2\epsilon}{6})} \|\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \tag{3.10}$$

que era lo que queríamos demostrar. □

Corolario 3.3. *Sean* $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 < \epsilon < 1$ *y* $0 < \theta \leqslant 1$. *Entonces,*

$$\left\| D_x^{\frac{12}{q(5-2\epsilon)}\left(\frac{\alpha}{2}-\epsilon\right)} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(t-t')F(t')dt' \right\|_{L_T^q L_{xy}^p} \lesssim \|F\|_{L_T^{q'} L_{xy}^{p'}} \tag{3.11}$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $p = \frac{2}{1-\theta}$, $\frac{2}{q} = \frac{\theta(5-2\epsilon)}{6}$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(1+2\epsilon)}{12}$

Demostración. De la desigualdad de Minkowski, el Corolario 3.2 y del teorema de Hardy-

Littlewood-Sobolev, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\left\| D_x^{\theta\left(\frac{\alpha}{2}-\epsilon\right)} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(t-t')F(t')dt' \right\|_{L_t^q L_{xy}^p} \\
&= \left\| \left\| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{\theta\left(\frac{\alpha}{2}-\epsilon\right)} W_\alpha(t-t')F(\cdot,\cdot,t')dt' \right\|_{L_{xy}^p} \right\|_{L_t^q} \\
&\leqslant \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left\| D_x^{\theta\left(\frac{\alpha}{2}-\epsilon\right)} W_\alpha(t-t')F(\cdot,\cdot,t') \right\|_{L_{xy}^p} dt' \right\|_{L_t^q} \\
&\lesssim \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |t-t'|^{-\frac{\theta(5-2\epsilon)}{6}} \left\| F(\cdot,\cdot,t') \right\|_{L_{xy}^{p'}} dt' \right\|_{L_{t^q}} \\
&\qquad\qquad\qquad \lesssim \left\| \left\| F(\cdot,\cdot,t') \right\|_{L_{xy}^{p'}} \right\|_{L_{t^{q'}}} = \| F \|_{L_t^{q'} L_{xy}^{p'}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Usando el argumento de Stein Thomas (vea [9]) tenemos.

Proposición 3.4. *Sean α, ϵ, θ, p y q como en la proposición anterior. Entonces,*

$$
\left\| D_x^{\frac{6}{q(5-2\epsilon)}\left(\frac{\alpha}{2}-\epsilon\right)} W_\alpha(t)\psi \right\|_{L_T^q L_{xy}^p} \lesssim \|\psi\|_{L_{xy}^2} \tag{3.12}
$$

De lo anterior tenemos los dos siguientes muy útiles corolarios en la demostración del buen planteamiento en este capítulo.

Corolario 3.5. *Para cada $T > 0$ y $0 < \epsilon < 1$, se tiene que*

$$
\|W_\alpha(t)\psi\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} \lesssim T^{\frac{1+2\epsilon}{12}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon-\frac{\alpha}{2}\right)} \psi \right\|_{L_{xy}^2} \tag{3.13}
$$

Demostración. De la desigualdad de Hölder y la Proposición 3.4 se tiene que

$$
\|W_\alpha(t)\psi\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} \leqslant T^{\frac{1+2\epsilon}{12}} \|W_\alpha(t)\psi\|_{L_T^{\frac{12}{5-2\epsilon}} L_{xy}^\infty} \lesssim T^{\frac{1+2\epsilon}{12}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon-\frac{\alpha}{2}\right)} \psi \right\|_{L_{xy}^2}
$$

$\square$

Al igual que en [15] y [26], daremos una estimativa refinada de Strichartz para la solución del problema lineal no homogéneo

$$
\partial_t w = w_{xxx} - \mathcal{H} D_x^\alpha w_{yy} + F. \tag{3.14}
$$

Así, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.6. *Sean $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1, 0 < \epsilon < 1$ y $T > 0$. Si w es solución de (3.14). Entonces existe $c_\epsilon > 0$ tal que*

$$\|\partial_x w\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \leqslant c_\epsilon T^{\frac{7+2\epsilon}{12}} \left(\sup_{t\in[0,T]} \left\| J_x^{\frac{17}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon}{3}} w \right\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left\| D_x^{\frac{5}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon}{3}} F(t) \right\|_{L^2_{xy}} dt \right) \tag{3.15}$$

Demostración. Haremos uso de una descomposición de tipo Littlewood-Paley de w en la variable x. Para ésto, sean $\varphi_0, \varphi \in C_0^\infty$ con $\operatorname{supp}(\varphi_0) = \{|\xi| < 2\}$ y $\operatorname{supp}(\varphi) = \left\{\frac{1}{2} < |\xi| < 2\right\}$ tal que $\varphi_0(\xi) + \sum_{k=1}^\infty \varphi(2^{-k}\xi) = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Definimos $P_k w$ vía transformada de Fourier por $\widehat{P_0 w}(\xi,\eta) = \varphi_0(\xi)\widehat{w}(\xi,\eta)$ y $\widehat{P_k w}(\xi,\eta) = \varphi(2^{-k}\xi)\widehat{w}(\xi,\eta)$ para $k \geqslant 1$, de tal manera que

$$w = \sum_{k=0}^\infty P_k w$$

Hagamos primero una estimativa para $\|\partial_x P_0 w\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}$. Como w satisface (3.14), entonces $P_0 w$ satisface la ecuación integral al aplicar P_0 en ambos lados de la ecuación. Así, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz y (3.13), se sigue que

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x P_0 w\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \\
&\leqslant \|W_\alpha(t)\partial_x P_0 w(0)\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \int_0^t \|W_\alpha(t-t')\partial_x P_0 F(t')\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} dt' \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}} \left(\|W_\alpha(t)\partial_x P_0 w(0)\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \int_0^t \|W_\alpha(t-t')\partial_x P_0 F(t')\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} dt' \right) \\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}+\frac{1+2\epsilon}{12}} \left(\left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon-\frac{\alpha}{2})} \partial_x P_0 w(0) \right\|_{L^2_{xy}} + \int_0^t \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon-\frac{\alpha}{2})} \partial_x P_0 F(t') \right\|_{L^2_{xy}} dt' \right) \\
&\lesssim c_\epsilon T^{\frac{7+2\epsilon}{12}} \left(\left\| J_x^{\frac{17}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon}{3}} P_0 w(0) \right\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left\| D_x^{\frac{5}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon}{3}} P_0 F(t) \right\|_{L^2_{xy}} dt \right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ahora, estimemos $\|\partial_x P_k w\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}$, cuando $k \geqslant 1$. Para ésto, haremos una partición adecuada en el tiempo de manera que permita controlar las frecuencias localizadas asociadas a la variable x. Así pues, sea $\mathcal{P} = \{a_0, a_1, ..., a_{2^k}\}$ una partición del intervalo $[0,T]$ con $a_j = jT2^{-k}$, $j = 0, 1, \cdots, 2^k$. Notaremos por I_j al intervalo $[a_{j-1}, a_j]$.
Entonces, gracias a la desigualdad de Young, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad $\left\|(\chi_{\{2^{k-1}<|\xi|<2^k\}}\xi)^\vee\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim 2^k$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x P_k w\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} &\leqslant \left\|(\chi_{\{2^{k-1}<|\xi|<2^k\}}(\xi)\,|\xi|)^\vee\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \|P_k w\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \\
&\lesssim 2^k \sum_{j=1}^{2^k} \|P_k w\|_{L^1_{I_j} L^\infty_{xy}} \\
&\lesssim (2^k) \sum_{j=1}^{2^k} (a_j - a_{j-1})^{\frac{1}{2}} \|P_k w\|_{L^2_{I_j} L^\infty_{xy}} \\
&= (2^k T)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{2^k} \|P_k w\|_{L^2_{I_j} L^\infty_{xy}}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Del principio de Duhamel sobre cada intervalo $[a_{j-1}, a_j]$, se tiene que, para cada $t \in [a_{j-1}, a_j]$,

$$P_k w(t) = W_\alpha(t-a_j)P_k w(\cdot, a_j) + \int_{a_{j-1}}^{t} W_\alpha(t-t')P_k F(t')dt'$$

De (3.17) y (3.13), tenemos

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x P_k w\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \lesssim (2^k T)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{2^k} \|P_k w\|_{L^2_{[a_j,b_j]} L^\infty_{xy}} \\
&\lesssim (2^k T)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{2^k} \left(\|W_\alpha(t-a_j)P_k w(\cdot,a_j)\|_{L^2_{I_j} L^\infty_{xy}} + \int_{a_{j-1}}^{t} \|W_\alpha(t-t')P_k F(t')\|_{L^2_{I_j} L^\infty_{xy}} dt' \right) \\
&\lesssim 2^{\frac{k(5+2\epsilon)}{12}} T^{\frac{7+2\epsilon}{12}} \sum_{j=1}^{2^k} \left(\left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon - \frac{\alpha}{2}\right)} P_k w(\cdot,a_j) \right\|_{L^2_{xy}} + \int_{I_j} \left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon - \frac{\alpha}{2}\right)} P_k F(t') \right\|_{L^2_{xy}} dt' \right) \\
&\lesssim T^{\frac{7+2\epsilon}{12}} \Bigg\{ 2^{\frac{k(5+2\epsilon)}{12}} \sum_{j=1}^{2^k} \left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon - \frac{\alpha}{2}\right)} P_k w(\cdot,a_j) \right\|_{L^2_{xy}} + \\
&\qquad\qquad + 2^{\frac{k(5+2\epsilon)}{12}} \int_0^T \left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon - \frac{\alpha}{2}\right)} P_k F(t') \right\|_{L^2_{xy}} dt' \Bigg\} \\
&\lesssim c_\epsilon T^{\frac{7+2\epsilon}{12}} \left(\sup_{t\in[0,T]} \left\| D_x^{\frac{17}{12} - \frac{\alpha}{4} + \frac{2\epsilon}{3}} P_k w(t) \right\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left\| D_x^{\frac{5}{12} - \frac{\alpha}{4} + \frac{2\epsilon}{3}} P_k F(t') \right\|_{L^2_{xy}} dt' \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En la busqueda de la completez de la argumentación expliquemos la desigualdad

$$2^{\frac{k(5+2\epsilon)}{12}} \sum_{j=1}^{2^k} \left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon - \frac{\alpha}{2}\right)} P_k w(\cdot,a_j) \right\|_{L^2_{xy}} \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left\| D_x^{\frac{17}{12} - \frac{\alpha}{4} + \frac{2\epsilon}{3}} P_k w(t) \right\|_{L^2_{xy}}, \tag{3.19}$$

que fue usada para demostrar la anterior desigualdad. Obsérvese que, para cada entero $j \leqslant 2^k$, se tiene que

$$\left\| D_x^{\frac{1}{2}\left(\epsilon - \frac{\alpha}{2}\right)} P_k w(\cdot,a_j) \right\|_{L^2_{xy}} \leqslant j^{-\frac{k(17+2\epsilon)}{12}} \left\| D_x^{\frac{17}{12} - \frac{\alpha}{4} + \frac{2\epsilon}{3}} P_k w(\cdot,a_j) \right\|_{L^2_{xy}}.$$

Sumando en j de 1 hasta 2^k y teniendo en cuenta que

$$\sum_{j=1}^{2^k} j^{-\frac{k(17+2\epsilon)}{12}} \sim 2^{-\frac{k(5+2\epsilon)}{12}}$$

se sigue la desigualdad (3.19).
(3.18) junto a (3.16) muestran el presente lema. □

3.2. Estimativa de energía

Lema 3.7. *Sean* $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $T > 0$ *y* $u \in C([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^2))$ *una solución del problema de Cauchy* (0.13). *Entonces, existe una constante positiva* C *tal que, para* $1 \leqslant s_2 \leqslant s_1$,

$$\|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^{s_1,s_2}} \leqslant \|\psi\|_{H_{xy}^{s_1,s_2}} e^{C(\|\partial_x u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty} + \|\partial_y u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty})} \tag{3.20}$$

Demostración. Sea u como en el enunciado del lema. Estimemos primero $\|J_x^{s_1} u\|_{L_{xy}^2}$. Operando con $J_x^{s_1}$ y luego multiplicando por $J_x^{s_1} u$ en ambos lados de la ecuación (0.13), e integrando con respecto a x, y, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} (J_x^{s_1} u)^2 dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} J_x^{s_1}(u\partial_x u) J_x^{s_1} u \, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [J_x^{s_1}, u]\, \partial_x u J_x^{s_1} u dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} u J_x^{s_1} \partial_x u J_x^{s_1} u \, dxdy \end{aligned} \tag{3.21}$$

De la desigualdades de Cauchy-Shwartz, en la variable x, y de Kato-Ponce (Lema 1.8), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} [J_x^{s_1}, u]\, \partial_x u J_x^{s_1} u \, dxdy &\leqslant \int_{\mathbb{R}_y} \|[J_x^{s_1}, u]\, \partial_x u\|_{L_x^2} \|J_x^{s_1} u\|_{L_x^2} \, dy \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}_y} \|\partial_x u\|_{L_x^\infty} \|J_x^{s_1} u\|_{L_x^2}^2 \, dy \\ &\leqslant \|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} \|J_x^{s_1} u\|_{L_{xy}^2}^2 \leqslant \|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} \|u\|_{H_{xy}^{s_1,s_2}}^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u J_x^{s_1} \partial_x u J_x^{s_1} \, u \, dxdy = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \partial_x u \, (J_x^{s_1} u)^2 \, dxdy \lesssim \|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} \|J_x^{s_1} u\|_{L_{xy}^2}^2 \tag{3.23}$$

De (3.21), (3.22) y (3.23), tenemos

$$\frac{d}{dt}\|J_x^{s_1} u\|_{L_{xy}^2}^2 \lesssim \|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} \|J_x^{s_1} u\|_{L_{xy}^2}^2 \lesssim \|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} \|u\|_{H_{xy}^{s_1,s_2}}^2 \tag{3.24}$$

De manera totalmente análoga estimamos $\left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_{xy}^2}$. Así pues,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_{xy}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left[J_y^{s_2}, u\right] \partial_x u J_y^{s_2} u \, dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} u J_y^{s_2} \partial_x u J_y^{s_2} u \, dxdy \tag{3.25}$$

Procediendo como antes tenemos,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \left[J_y^{s_2}, u\right] \partial_x u J_y^{s_2} u \, dxdy \leqslant \int_{\mathbb{R}_x} \left\|\left[J_y^{s_2}, u\right] \partial_x u\right\|_{L_y^2} \left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_y^2} dx \lesssim \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}_x} \left(\|\partial_y u\|_{L_y^\infty} \left\|J_y^{s_2-1}\partial_x u\right\|_{L_y^2} + \|\partial_x u\|_{L_y^\infty} \left\|J_y^{s_2}\partial_x u\right\|_{L_y^2}\right) \left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_y^2} dx \\ &\leqslant \|\partial_y u\|_{L_{xy}^\infty} \left\|J_y^{s_2-1}\partial_x u\right\|_{L_{xy}^2} \left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_{xy}^2} + \|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} \left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_{xy}^2}^2 \\ &\leqslant \|\partial_y u\|_{L_{xy}^\infty} \left\|J_x^{s_2} u\right\|_{L_{xy}^2}^{\frac{1}{s_2}} \left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_{xy}^2}^{\frac{2s_2-1}{s_2}} + \|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} \left\|J_y^{s_2} u\right\|_{L_{xy}^2}^2 \\ &\lesssim \left(\|\partial_x u\|_{L_{xy}^\infty} + \|\partial_y u\|_{L_{xy}^\infty}\right) \|u\|_{H_{xy}^{s_1,s_2}}^2 . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Así, integrando por partes en el segundo término del lado derecho en la desigualdad (3.25) y de la última desigualdad, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left\|J_y^{s_2}u\right\|_{L^2_{xy}}^2 \lesssim \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^\infty_{xy}}\right)\|u\|^2_{H^{s_1,s_2}_{xy}} \tag{3.27}$$

Juntando (3.24) y (3.27), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{H^{s_1,s_2}_{xy}} \lesssim \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^\infty_{xy}}\right)\|u\|^2_{H^{s_1,s_2}_{xy}} \tag{3.28}$$

De la desigualdad de Gronwall se obtiene el lema. □

3.3. Una estimativa tipo Strichartz

La estimativa de la energía nos suguiere que se deben controlar las normas $\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}$ y $\|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}$ para poder demostrar el buen planteamiento del problema de Cauchy (0.13). El siguiente lema muestra como se controlan estas normas.

Lema 3.8. *Sean $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $T > 0$ y $u \in C([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^2))$ una solución del problema de valor inicial* (0.13) *con condición inicial ψ. Entonces, para cualquier $s_1 > \frac{17}{12} - \frac{\alpha}{4}$ tal que*

$$\begin{cases} s_2 > 1 & si\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \\ \frac{1}{s_2} - \frac{\alpha}{4s_1} < 1 & si\ -1 \leqslant \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

y $s_1 \geqslant s_2$, existen contantes C_{s_1,s_2} y $k_{s_1,s_2} \in (7/12, 1)$ tales que

$$f(T) = \|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \tag{3.29}$$

satisface

$$f(T) \leqslant C_{s_1,s_2} T^{k_{s_1,s_2}}(1 + f(T))\|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}_{xy}} \tag{3.30}$$

Demostración. Primero examinemos una estimativa para $\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}$. De la estimativa refinada de Strichartz (3.15), tenemos

$$\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \leqslant c_\epsilon T^{\frac{7+2\epsilon}{12}}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left\|J_x^{\frac{17}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon}{3}}u\right\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left\|D_x^{\frac{5}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon}{3}}(u\partial_x u)\right\|_{L^2_{xy}} dt\right) \tag{3.31}$$

Escojamos $0 < \epsilon_1 < 1$ de tal forma que $\frac{5}{12} - \frac{\alpha}{4} + \frac{2\epsilon_1}{3} < 1$ y $\frac{17}{12} - \frac{\alpha}{4} + \frac{2\epsilon_1}{3} < s_1$. Así, para el primer término al lado derecha de (3.32) tenemos

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|J_x^{\frac{17}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon_1}{3}}u\right\|_{L^2_{xy}} \leqslant \sup_{t\in[0,T]}\|J_x^{s_1}u\|_{L^2_{xy}} \leqslant \|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}_{xy}}. \tag{3.32}$$

Para el segundo término en la parte derecha de (3.32), de la regla de Leibniz (ecuación (1.6)) en x, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\| D_x^{\frac{5}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon_1}{3}}(u\partial_x u)\right\|_{L^2_{xy}} dt \lesssim \\
&\lesssim \int_0^T \left\| \left\| D_x^{\frac{5}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon_1}{3}} u\right\|_{L^2_x} \|\partial_x u\|_{L^\infty_x} + \left\| D_x^{\frac{5}{12}-\frac{\alpha}{4}+\frac{2\epsilon_1}{3}} \partial_x u\right\|_{L^2_x} \|u\|_{L^\infty_x} \right\|_{L^2_y} dt \\
&\lesssim \int_0^T \left\| \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_x} \|\partial_x u\|_{L^\infty_x} + \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_x} \|u\|_{L^\infty_x} \right\|_{L^2_y} dt \\
&\lesssim \int_0^T \left(\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \right) \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_{xy}}\, dt \\
&\lesssim \|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}_{xy}}\, f(T)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Luego, de (3.33), (3.32) y (3.31)

$$\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \leqslant C_1(s_1) T^{\frac{7+2\epsilon_1}{12}} (1 + f(T)) \|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}_{xy}} . \tag{3.34}$$

Estimemos ahora $\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}$. Del principio de Duhamel, la desigualdad de Cauchy-Schwartz en t y el Corolario 3.5, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} &\leqslant \|W_\alpha(t)\psi\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \int_0^T \|W_\alpha(t-t')(u\partial_x u)(t')\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\, dt' \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}} \left(\|W_\alpha(t)\psi\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + \int_0^T \|W_\alpha(t-t')(u\partial_x u)(t')\|_{L^2_T L^\infty_{xy}}\, dt' \right) \\
&\leqslant C_2 T^{\frac{7+2\epsilon_2}{12}} \left(\left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_2-\frac{\alpha}{2})}\psi \right\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_2-\frac{\alpha}{2})}(u\partial_x u)(t') \right\|_{L^2_{xy}} dt' \right),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

para algún $\epsilon_2 = \epsilon_2(s_1)$ tal que $0 < \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \frac{\alpha}{2})$ y $\frac{1}{2}(\epsilon_2 - \frac{\alpha}{2}) + 1 < s_1$. El primer término en la última línea de la anterior ecuación, gracias a la elección de ϵ_2, es menor que $\|J_x^{s_1}\psi\|_{L^2_{xy}}$. Para el término dentro de la integral, de la regla de Leibniz en la variable x, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_2-\frac{\alpha}{2})}(u\partial_x u)\right\|_{L^2_{xy}} &\leqslant \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_2-\frac{\alpha}{2})} u\right\|_{L^2_{xy}} \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} + \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_2-\frac{\alpha}{2})} \partial_x u\right\|_{L^2_{xy}} \|u\|_{L^\infty_{xy}} \\
&\leqslant \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_{xy}} \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} + \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_{xy}} \|u\|_{L^\infty_{xy}} .
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} &\leqslant C_2 T^{\frac{7+2\epsilon_2}{12}} \left(\|J_x^{s_1}\psi\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left(\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \right) \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_{xy}}\, dt' \right) \\
&\leqslant C_2 T^{\frac{7+2\epsilon_2}{12}} \left(\|J_x^{s_1}\psi\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left(\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \right) \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_{xy}}\, dt' \right) \\
&\leqslant C_2 T^{\frac{7+2\epsilon_2}{12}} (1 + f(T)) \|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}_{xy}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde $C_2 = C_2(s_1)$. Por último, estimemos $\|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}$. De la misma forma como estimamos los otros dos términos tenemos que

$$\|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \leqslant C_3 T^{\frac{7+2\epsilon_3}{12}} \left(\left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})} \partial_y \psi \right\|_{L^2_{xy}} + \int_0^T \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})} \partial_y (u \partial_x u) \right\|_{L^2_{xy}} dt \right), \tag{3.38}$$

donde ϵ_3 lo escojeremos más adelante. Para el término dentro de la integral, de la estimativa del conmutador (Lema 1.10) en la variable x, obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})+1} (u \partial_y u) \right\|_{L^2_{xy}} &\leqslant \left\| \left[D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})+1}, u \right] \partial_y u \right\|_{L^2_{xy}} + \left\| u D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})} \partial_y u \right\|_{L^2_{xy}} \\ &\leqslant \left(\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \right) \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})} \partial_y u \right\|_{L^2_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^\infty_{xy}} \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})+1} u \right\|_{L^2_{xy}}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Examinemos entonces $\left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})+1} u \right\|_{L^2_{xy}}$ y $\left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})} \partial_y u \right\|_{L^2_{xy}}$. Ésto lo haremos para dos casos en α. El primer caso es cuando $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$. En este caso $\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2}) > 0$ para $0 < \epsilon_3 < 1$. Escojamos ϵ_3 de tal manera que $\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2}) + 1 < s_1$ y $\frac{\epsilon_3}{2s_1} - \frac{\alpha}{4s_1} + \frac{1}{s_2} < 1$, o equivalentemente $\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2}) \frac{s_2}{s_2 - 1} < s_1$. Así pues,

$$\left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})+1} u \right\|_{L^2_{xy}} \leqslant \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_{x,y}} \leqslant \|u\|_{H^{x_1,x_2}_{x,y}} \tag{3.40}$$

y

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})} \partial_y u \right\|_{L^2_{xy}} &\leqslant \left\| J_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2})} J_y u \right\|_{L^2_{xy}} \leqslant \left\| J_x^{\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2}) \frac{s_2}{s_2-1}} u \right\|_{L^2_{xy}}^{\frac{s_2-1}{s_2}} \|J_y^{s_2} u\|_{L^2_{xy}}^{\frac{1}{s_2}} \\ &\leqslant \|J_x^{s_1} u\|_{L^2_{xy}}^{\frac{s_2-1}{s_2}} \|J_y^{s_2} u\|_{L^2_{xy}}^{\frac{1}{s_2}} \leqslant \|u\|_{H^{s_1,s_2}_{x,y}} \end{aligned} \tag{3.41}$$

El segundo caso es cuando $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Ecojamos, entonces, $\epsilon_3 > \frac{\alpha}{2}$ tal que asimismo $\frac{1}{2}(\epsilon_3 - \frac{\alpha}{2}) + 1 < s_1$ y $\frac{\epsilon_3}{2s_1} - \frac{\alpha}{4s_1} + \frac{1}{s_2} < 1$. Así que quedamos en la misma situación del primer caso, lo que nos lleva a las mismas dos desigualdades (3.40) y (3.41). Estas desigualdades junto a las desigualdades (3.39) y (3.38) nos permiten mostrar que

$$\|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \leqslant C_3 T^{\frac{7+2\epsilon_3}{12}} \left(\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}_{xy}} + (1 + f(T)) \|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}_{xy}} \right). \tag{3.42}$$

El teorema sigue de (3.34), (3.37) y (3.42), tomando $C_{s_1,s_2} = C_1 + C_2 + C_3$ y $k_{s_1,s_2} = \text{máx}_{i=1,2,3} \frac{7+2\epsilon_i}{12}$. □

3.4. Buen planteamiento

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.9. *Sean* $-1 < \alpha < 1$ *y* $0 < \epsilon < 1$ *tal que*

$$s_1 > \frac{17 + 4\epsilon - 3\alpha}{12}, \quad s_2 \leqslant s_1 \ y \ \begin{cases} s_2 > 1 & si\ \alpha > 0, \\ \frac{5+4\epsilon-3\alpha}{12 s_1} + \frac{1}{s_2} < 1 & si\ \alpha \leqslant 0. \end{cases}$$

Entonces, para cualquier $\psi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$*, existe un tiempo* $T = T(\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}})$ *y una única solución* $u \in C([0,T] : H^{s_1,s_2})$ *del problema de Cauchy* (0.13) *tal que* $u, \partial_x u, \partial_y u \in L^1_T L^\infty_{xy}$*. Además, si* $0 < T' < T$*, existe una vecindad* $\mathcal{V}$ *de* ψ *en* $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $\psi \mapsto u(t)$ *es continua*

Del buen planteamiento de (0.13) en H^σ para $\sigma > 2$ (σ fijo), para $\psi \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$, existe una única solución $u \in C([0,T^*] : H^\sigma(\mathbb{R}^2))$, donde T^* es el tiempo maximal de existencia de la solución, tal que si $T^* < \infty$, entonces

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{H^\sigma} = \infty. \tag{3.43}$$

Gracias a lo anterior se tiene la siguiente estimativa a priori que será útil en la demotración de la existencia de la solución del problema (0.13).

Lema 3.10. *Sea* $2 < \sigma$*,* $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *y* s_1*,* s_2 *como en Teorema* (3.9) *tales que* $s_i \leqslant \sigma$*,* $i = 1,2$*. Sean, asimismo,* $\psi \in H^\sigma$ *y* $u \in C([0,T^*) : H^\sigma(\mathbb{R}^2))$ *tal que* $u(0) = \psi$*, donde* T^* *es el tiempo máximal de existencia de u. Entonces, existen* $K_0 = K_0(s_1,s_2) > 0$*,* $L_{s_1,s_2} > 0$ *tales que* $T^* > T$*, donde* $(L_{s_1,s_2}\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} + 1)^{\frac{12}{7}} T = 1$*, y*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}} &\leqslant 2\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} \\ f(T) = \|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} &+ \|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \leqslant K_0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Demostración. Para s_1 y s_2 como en el enunciado del lema, sea

$$T_0 = \sup_{\tilde{T} \in (0,T^*)} \left\{ \tilde{T} \mid \|u\|_{L^\infty_{\tilde{T}} H^{s_1,s_2}} \leqslant 2\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} \right\} \tag{3.45}$$

Del buen planteamiento, este conjunto no es vacío. Sean C_{s_1,s_2} como en el Lema 3.8, C como en el Lema 3.7, $L_{s_1,s_2} = 2(2C-1)C_{s_1,s_2}$ y

$$T = \frac{1}{(L_{s_1,s_2}\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} + 1)^{\frac{12}{7}}}.$$

Veamos que $T \leqslant T_0$. Supongamos que no. Gracias al Lema 3.8

$$f(T_0) \leqslant C_{s_1,s_2} T_0^{k_{s_1,s_2}} (1 + f(T_0)) \|u\|_{L^\infty_{T_0} H^{s_1,s_2}_{xy}} \leqslant C_{s_1,s_2} T_0^{\frac{7}{12}} (1 + f(T_0)) \|u\|_{L^\infty_{T_0} H^{s_1,s_2}_{xy}} \tag{3.46}$$

Como $\|u\|_{L^\infty_{T_0} H^{s_1,s_2}} \leqslant 2\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}}$ y $T_0 < T$,

$$f(T_0) \leqslant 2C_{s_1,s_2} \frac{(1 + f(T_0))}{L_s \|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} + 1} \|\psi\|_{H^{s_1,s_2}}$$

o equivalentemente

$(4CC_{s_1,s_2}\,\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} + 1)f(T_0) \leqslant 2C_{s_1,s_2}\,\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}}$

Por lo tanto,

$f(T_0) \leqslant \dfrac{1}{2C}$

Del Lema 3.7 tendríamos

$$\|u(T_0)\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant e^{\frac{1}{2}}\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} < 2\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}}.$$

De la continuidad de u, se sigue que existe $\tilde{T} > T_0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty_{\tilde{T}} H^{s_1,s_2}} \leqslant 2\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}},$$

lo que contradice la elección de T_0. Luego, $T \leqslant T_0$. En particular,

$$\|u\|_{L^\infty_T H^{s_1,s_2}} \leqslant 2\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}},$$

y, al repetir el razonamiento anterior a partir de la desigualdad (3.46), tomando T en lugar de T_0, tenemos que

$f(T) \leqslant \dfrac{1}{2C}.$

Esto prueba el lema. □

Corolario 3.11. *Sea ψ y T como en el lema anterior. Si $\psi \in H^\infty$, entonces la solución u del problema de Cauchy* (0.13)*, con $u(0) = \psi$, pertenece al conjunto $C([0,T]; H^\infty)$.*

Demostración. Sea T como en el lema anterior. De ese lema, para cualquier número σ que sastisface la condición que allí se establece, se tiene que $u \in C([0,T]; H^\sigma)$. De aquí sigue el corolario. □

Corolario 3.12. *Sea $R > 0$ y $\psi \in H^\infty$ tal que $\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant R$. Entonces, existe T_0 que depende de R y M, constante que sólo depende de s_1, s_2, tales que $u \in C([0,T_0]; H^\infty)$ y*

$$f(T_0) = \|u\|_{L^1_{T_0} L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^1_{T_0} L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^1_{T_0} L^\infty_{xy}} \leqslant M.$$

Demostración. Si hacemos $T_0 = 1/(L_{s_1,s_2}R + 1)^{\frac{12}{7}}$, tenemos que $T_0 \leqslant T$, T como en el lema anterior. De la demostración de ese lema se sigue que $f(T_0) \leqslant 1/2C$, que no depende del dato inicial, sólo de s_1 y s_2. Haciendo $M = 1/2C$ se muestra el corolario. □

3.4.1. Demostración del Teorema 3.9

Lema 3.13. *Supongamos que ψ y $\phi \in H^{\infty}$ y que u y $v \in C([0,T];H^{\infty})$ son las soluciones del problema* (0.13) *con condiciones iniciales ψ y ϕ, respectivamente. Entonces,*

$$\|u-v\|_{L^2}(T_0) \leqslant \|\psi-\phi\|_{L^2} e^{CM},$$

donde $T_0(R)$ y M son como en el Corolario 3.12, C una constante que depende sólo de s_1 y s_2, y R es el máximo entre las normas de ϕ y ψ en el espacio H^{s_1,s_2}.

Demostración. La demostración es análoga a la obtención de la estimativa de energía. Veamos. Sean u y v como en el enunciado del lema. Entonces,

$$\partial_t(u-v) = \partial_x^3(u-v) - \mathcal{H}D^{\alpha}\partial_y^2(u-v) + \frac{1}{2}(u+v)\partial_x(u-v) + \frac{1}{2}(u-v)\partial_x(u+v).$$

Multiplicando por $u-v$ en ambos lados de la ecuación y al integrar por partes se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-v\|_2^2 \leqslant \frac{1}{4}(\|u_x\|_{L^{\infty}} + \|v_x\|_{L^{\infty}})\|u-v\|_2^2.$$

Del Lema de Gronwall y el Corolario 3.12 se sigue el lema. □

Ahora, sea $\psi \in H^{s_1,s_2}$ y supongamos que ψ_n es una sucesión de funciones en H^{∞} que convergen a ψ en H^{s_1,s_2} . Al tomar $R = \sup_n \|\psi_n\|$, del lema anterior, las soluciones de (0.13) $u_n \in C([0,T_0];H^{\infty}(\mathbb{R}^2))$, con condición inicial ψ_n, convergen uniformemente a una función u en $C([0,T_0];L^2(\mathbb{R}^2))$. Más aún, del Corolario 3.12, las funciones u_n son uniformemente acotadas en H^{s_1,s_2}. Por lo tanto, del teorema Banach-Alaoglu, $u_n(t)$ tiene una subsucesión que converge débilmente en H^{s_1,s_2}. De la convergencia uniforme de $u_n(t)$ a $u(t)$ en L^2, se sigue que $u(t) \in H^{s_1,s_2}$, para cada $t \in [0,T_0]$. De la continuidad de u de $[0,T_0]$ en L^2 se sigue la continuidad débil de u de $[0,T_0]$ en H^{s_1,s_2}. En particular, de la acotación uniforme de la sucesión $u_n(t)$ y del Lema 1.7, se sigue que u_n converge fuerte y uniformemente en $H^{s_1',s_2'}$ a u, para cualquier par de números reales no negativos s_1', s_2' estrictamente menores que s_1, s_2, respectivamente. Como cada una de las funciones de u_n satisface la ecuación integral asociada a (0.13),

$$w = W_{\alpha}(t)w(0) + \frac{1}{2}\int_0^t W_{\alpha}(t-t')\partial_x(w^2(t'))\,dt', \tag{3.47}$$

en $H^{s_1'-1,s_2'-1}$, se sigue que la función u satisface ésta misma ecuación integral en $H^{s_1'-1,s_2'-1}$, $1 < s_2' < s_2$. Del Lema 3.6, al considerar $17/12-\alpha/4 < s_1' < s_1$, se sigue que $\partial_x u \in L_T^1 L_{x,y}^{\infty}$. De la misma manera, gracias a las desigualdades (3.35) y (3.38), obtenemos que u y $\partial_y u \in L_T^1 L_{x,y}^{\infty}$. Así pues,

Lema 3.14. *Sea $\psi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$. Entonces, existe un $T > 0$ y una única de $u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C_w([0,T];H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T];H^{-3} \cap (X^3)*)$ solución del problema* (0.13). *Además, u, $\partial_x u$, $\partial_y u \in L_T^1 L_{x,y}^{\infty}$ y la transformación $\psi \mapsto u$ es Lipschitz continua de $L^2(\mathbb{R}^2)$ a $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))$.*

Demostración. Sólo falta demostrar que u es única y que la transformación $\psi \mapsto u$ es Lipschitz continua de $L^2(\mathbb{R}^2)$ a $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))$. Sean u y v como en el enunciado del lema. Como u y v son soluciones de la ecuación integral, del Lema 3.6, u_x y $v_x \in L^1_T L^\infty_{x,y}$. Ahora procedemos como en el lema anterior, pero necesitamos el Lema (1.3), para obtener que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-v\|^2_{L^2} = \frac{1}{4}(\partial_x u + \partial_x v, (u-v)^2)_{L^2} \leqslant (\|u_x\|_{L^\infty_{x,y}} + \|v_x\|_{L^\infty_{x,y}})\|u-v\|^2_{L^2}.$$

Ya que $\|u_x\|_{L^\infty_{x,y}} + \|v_x\|_{L^\infty_{x,y}}$ es integrable y $\|u-v\|^2_{L^2}$ es continua, del lema de Gronwall se sigue el teorema. □

Lema 3.15. *Para $\psi \in H^{s_1,s_2}$ como en el lema anterior, la solución u de* (0.13) *descrita allí es fuertemente continua en H^{s_1,s_2}*

Demostración. Sean ψ, ψ_n, u_n, $n = 1,2,3,\cdots$, y u como antes. Sean, asimismo, M, T_0 como en el Corolario 3.12 y $T \leqslant T_0$. Es claro que $f_n(T) = \|u_n\|_{L^\infty_{x,y}} + \|\partial_x u_n\|_{L^\infty_{x,y}} + \|\partial_y u_n\|_{L^\infty_{x,y}}$ satisface que

$$f_n(T) \leqslant M,$$

para todo n. Del Lema 3.8 y el Corolario 3.12, se sigue que

$$f_n(T) \leqslant 2C_{s_1,s_2}T^{k_{s_1,s_2}}(1+M)R.$$

Del Lema de 3.7,

$$\|u_n(T)\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant \|\psi_n\|_{H^{s_1,s_2}} e^{2C_{s_1,s_2}T^{k_{s_1,s_2}}(1+M)R},$$

para todo n. De la convergecia débil de $u_n(T)$ a $u(T)$ en H^{s_1,s_2} y como ψ_n converge a ψ en H^{s_1,s_2}, se sigue que

$$\|u(T)\|_{H^{s_1,2_2}} \leqslant \|\psi\|_{H^{s_1,2_2}} e^{2C_{s_1,s_2}T^{k_{s_1,s_2}}(1+M)R}.$$

De esta última desigualdad y la continuidad débil de u en H^{s_1,s_2}, se sigue que

$$\|\psi\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant \liminf_{T\to 0+} \|u(T)\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant \limsup_{T\to 0+} \|u(T)\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant \|\psi\|_{H^{s_1,s_2}}.$$

Luego, u es continua fuertemente a derecha en 0 en el espacio H^{s_1,s_2}. Como $u(-t,-x,-y)$ es asímismo solución de la ecuación (0.13), tenemos que u es asimismo continua fuertemente a izquierda en 0 en el espacio H^{s_1,s_2}. Ahora bien, para cualquier $t^* \in [0,T]$, $u(t+t^*)$ es también solución de la ecuación (0.13) con condición inicial $u(t^*)$. Luego, de la unicidad de la solución, u también es fuertemente continua en t^* en el espacio H^{s_1,s_2}. Esto termina la demostración. □

Ahora examinemos la continuidad de las soluciones de (0.13) con respecto al dato inicial. Para este propósito usaremos una técnica muy útil y recurrentemente usada en la literatura relacionada con el buen planteamiento de ecuaciones de evolución. Esta técnica es el método de aproximaciones de Bona-Smith introducida en [7]. Veamos.

Lema 3.16. *Sea $\phi \in H^{s_1,s_2}$, s_1 y s_2 números reales positivos. Para cada $\tau > 0$ definamos ϕ^τ por*

$$\phi^\tau(x,y) = \left(\widehat{\phi}(\xi,\eta)\exp\left(-\tau\left((1+|\xi|^2)^{\frac{s_1}{2}} + (1+|\eta|^2)^{\frac{s_2}{2}}\right)\right)\right)^{\vee}(x,y) \tag{3.48}$$

Entonces

$$\lim_{\tau\to 0+} \|\phi^\tau - \phi\|_{H^{s_1,s_2}} = 0$$

y existe una constante $C = C(s)$ tal que

$$\|\phi^\tau\|_{H^{s_1+1,s_2}} \leqslant C(\left(\frac{1}{\tau s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \|\phi\|_{H^{s_1,s_2}}, \tag{3.49}$$

$$\|\phi^\tau\|_{H^{s_1,s_2+1}} \leqslant C(\left(\frac{1}{\tau s_2}\right)^{\frac{1}{s_2}} \|\phi\|_{H^{s_1,s_2}} \tag{3.50}$$

y

$$\|\phi^\tau - \phi^\theta\|_{L^2} \leqslant C|\tau-\theta|\|\phi\|_{H^{s_1,s_2}} \tag{3.51}$$

Proposición 3.17. *Sean $R > 0$, Λ un conjunto y $\psi_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de funciones en H^∞ tales que $\|\psi_\lambda\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant R$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Sean ψ_λ^τ las aproximaciones definidas a partir de ψ_λ como en (3.48), y u_λ^τ las soluciones de (0.13) con condición inicial ψ_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$. Supongamos que $0 \leqslant \theta < \tau$, entonces, para $\nu > 0$*

$$\left\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\right\|_{H^{s_1,s_2}}^2 \leqslant C\left(\left\|\psi_\lambda^\tau - \psi_\lambda^\theta\right\|_{H^{s_1,s_2}}^2 + \tau^\nu\right).$$

para todo $\lambda \in \Lambda$.

Demostración. Es evidente que $u_\lambda^\tau(t)$ también está definido sobre $[0, T_0]$, para todo n y τ. Procederemos como en la demostración del Lema 3.7. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau\partial_x u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\partial_x u_\lambda^\theta) J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\,dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} J_x^{s_1}\partial_x\left((u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\right) J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\,dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} J_x^{s_1}\left((u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\right) J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\,dxdy + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(J_x^{s_1}\partial_x(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\right) J^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\,dxdy.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Estimemos los dos últimos términos que aparecen en la anterior desigualdad. Del Lema 1.8, para el primer término, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} & J_x^{s_1}\big((u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\big) J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \big([J_x^{s_1}, u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta]\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\big)\, J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\partial_x J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta) J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy \\
&\leqslant C(\|\partial_x(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\|J_x^{s_1-1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2} + \\
&\quad + \|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \partial_x(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta))^2\, dxdy \\
&\leqslant C(\|\partial_x(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 + \\
&\quad + \|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2})
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Con el segundo término procedemos de la misma manera para obtener la siguiente desigualdad

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} J_x^{s_1}\big(\partial_x(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\big) J^{s_1}\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy \leqslant \\
&\leqslant C(\|\partial_x u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\lambda^\theta\|_{L^\infty}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 + \\
&\qquad + \|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2})
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Así pues, $\|\psi_\lambda^\tau\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant R$, para todo λ, de (3.52), (3.53) (3.54) y el Lema 3.10 tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 \leqslant C\big((\|\partial_x u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\lambda^\theta\|_{L^\infty})\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 + \\
+ \|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\big)
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau\partial_x u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\partial_x u_\lambda^\theta) J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} J_y^{s_2}\partial_x\big((u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\big) J_y^{s_2}\partial_(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} J_y^{s_2}\big((u_\lambda^\tau + u_\lambda^\tau)\partial_x(u_\lambda^\theta - u_\lambda^\theta)\big) J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \big(J_y^{s_2}\partial_x(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\tau)(u_\lambda^\theta - u_\lambda^\theta)\big) J^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\, dxdy.
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

Procediendo del mismo modo que nos permite obtener (3.53) y (3.54), se sigue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} J_y^{s_2}\big((u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\big)J^{s_2}\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\,dxdy \leqslant\\
&\quad\leqslant C\big((\|\partial_y u_n^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_n^\theta\|_{L^\infty})\times\\
&\qquad\times(\|J_y^{s_2-1}\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2} + \|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2)+\\
&\qquad+\|J_y^{s_2}(u_n^\tau + u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\big)\\
&\quad\leqslant C\big((\|\partial_y u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_\lambda^\theta\|_{L^\infty})(\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 + \|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2)+\\
&\qquad+\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\big)
\end{aligned}\tag{3.57}$$

y

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} J_y^{s_2}\big(\partial_x(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\big)J^{s_2}\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\,dxdy \leqslant\\
&\qquad\leqslant C\big((\|\partial_x u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\lambda^\theta\|_{L^\infty})\|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2+\\
&\qquad\quad+\|J_y^{s_2-1}\partial_x(u_n^\tau + u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}\|\partial_y(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty})\\
&\qquad\leqslant C(\|\partial_x u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\lambda^\theta\|_{L^\infty})(\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 + \|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2)+\\
&\qquad\quad+\|\partial_y(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty})
\end{aligned}\tag{3.58}$$

Por lo tanto, de (3.56), (3.57) y (3.58), tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 \leqslant\\
&\leqslant C(\|\partial_x u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\lambda^\theta\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_\lambda^\theta\|_{L^\infty})\times\\
&\times(\|J_x^{s_1}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2 + \|J_y^{s_2}(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^2}^2)+\\
&\qquad\qquad+\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty} + \|\partial_y(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty})
\end{aligned}\tag{3.59}$$

Juntando (3.55) y (3.59), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|_{H^{s_1,s_2}}^2 \leqslant\\
&\leqslant C\big((\|\partial_x u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\lambda^\theta\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_\lambda^\theta\|_{L^\infty})\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|_{H^{s_1,s_2}}^2+\\
&\qquad\qquad+\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty} + \|\partial_y(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty}\big)
\end{aligned}\tag{3.60}$$

Integrando, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|_{H^{s_1,s_2}}^2 \leqslant \|\psi_\lambda^\tau - \psi_\lambda^\theta\|_{H^{s_1,s_2}}^2+\\
&+C\int_0^t(\|\partial_x u_\lambda^\tau\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\lambda^\theta\|_{L^\infty})\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|_{H^{s_1,s_2}}^2\,dt'+\\
&\qquad\qquad+\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^1_{T_0}L^\infty_{x,y}} + \|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^1_{T_0}L^\infty_{x,y}}
\end{aligned}\tag{3.61}$$

Estimemos los dos útimos términos de la última desigualdad. Obérvese que

$$u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta = W_\alpha(t)(\psi_\lambda^\tau - \psi_\lambda^\theta) + \int_0^t W_\alpha(t-t')\partial_x((u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta))(t')\,dt'.$$

Por lo tanto, procediendo como en la demostración del Lema 3.8, de la estimativa refinada de Strichartz (3.15) y el Lema 3.13, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^1_{T_0}L^\infty_{x,y}} \leqslant & C(\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|_{L^\infty_{T_0}H^{s_1',s_2'}_{x,y}} + \|(u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta)(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty_{T_0}H^{s_1',s_2'}_{x,y}}) \\
\leqslant & C(\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|_{L^\infty_{T_0}H^{s_1',s_2'}_{x,y}} + \|u_\lambda^\tau + u_\lambda^\theta\|_{L^\infty_{T_0}H^{s_1',s_2'}_{x,y}}\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^\infty_{T_0}H^{s_1',s_2'}_{x,y}}) \\
\leqslant & C\|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|_{L^\infty_{T_0}H^{s_1',s_2'}_{x,y}} \\
\leqslant & C\|\psi_\lambda^\tau - \psi_\lambda^\theta\|_{L^2}^\nu \|u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta\|^{1-\nu}_{L^\infty_{T_0}H^{s_1,s_2}_{x,y}} \\
\leqslant & C\tau^\nu,
\end{aligned}$$

donde s_1', s_2' y ν son tales que $1 < s_i' = \nu s_i < s_i$, $i = 1, 2$. Del mismo modo, de nuevo, si procedemos como en la demostración del Lema 3.8, más precisamente de la manera en que obtuvimos (3.42), también tenemos

$$\|\partial_y(u_\lambda^\tau - u_\lambda^\theta)\|_{L^1_{T_0}L^\infty_{x,y}} \leqslant C\tau^\nu$$

De estas dos últimas desigualdades junto a (3.61) y el Lema de Gronwall se sigue la proposición. $\square$

Corolario 3.18. *Sean, ψ_λ^τ y u_λ^τ como en el resultado anterior. Entonces, $\{u_\lambda^\tau\}_{\tau>0}$ converge uniformemente en t a u_λ, cuando $\tau \to 0+$. En otras palabras,*

$$\lim_{\tau\to 0+} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\lambda^\tau(t) - u_\lambda(t)\|_{H^{s_1,s_2}} = 0$$

Demostración. Tomando $\theta = 0$ en la Proposición 3.17. $\square$

Teorema 3.19. *En H^{s_1,s_2}, la aplicación $\psi \mapsto u$, donde u es solución de 0.13, es continua. Más precisamente, si $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\psi_n \to \psi$ en H^{s_1,s_2} y si $u_n \in C([0,T_0], H^{s_1,s_2})$ son las correspondientes soluciones de (0.13) con condicion inicial ψ_n, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_n(t) - u(t)\|_s = 0$$

Demostración. Sean $\psi \in H^{s_1,s_2}$ y (ψ_n) una sucesión en H^{s_1,s_2} que converge fuertemente ψ en este espacio. Sean, asimismo, $R = \max(\sup_n \|\psi_n\|_{H^{s_1,s_2}}, \|\psi\|_{H^{s_1,s_2}})$. Ahora bien, tomemos $\psi_{m,n} = e^{\frac{1}{m}\triangle}\psi_n$ y $\psi_m = e^{\frac{1}{m}\triangle}\psi$. Sean u_n, u, $u_{m,n}$, u_m, u_n^τ, u^τ, $u_{m,n}^\tau$, u_m^τ las correspondientes soluciones de (0.13) en $[0, T_0]$ con condiciones iniciales ψ_n, ψ, $\psi_{m,n}$, ψ_m, ψ_n^τ, ψ^τ, $\psi_{m,n}^\tau$, ψ_m^τ, respectivamente. Asimismo, obsérvese que $u_{n,m}$, u_m y $u^\tau_{m,n}$ y u^τ_m convergen uniformemente a u_n, u, u^τ_n y u^τ en el sentido débil, cuando $m \to \infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle u_n - u, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}} &= \lim_{m\to\infty} \langle u_{m,n} - u^\tau_{m,n}, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}} + \langle u^\tau_{m,n} - u^\tau_m, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}} + \\ &\quad + \langle u^\tau_m - u_m, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left[\langle u_{m,n} - u^\tau_{m,n}, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}} + \langle u^\tau_{m,n} - u_m, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}}\right] + \\ &\quad + \langle u^\tau_n - u^\tau, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

De otro lado, el Corolario 3.18 implica que, dado $\epsilon > 0$, existe τ_0 tal que para $0 < \tau \leqslant \tau_0$

$$|\langle u_{m,n} - u^\tau_{m,n}, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}} + \langle u^\tau_{m,n} - u_m, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}}| \leqslant \epsilon \,\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}} ,$$

para todo $m > 0$. Luego,

$$|\langle u_n - u, \varphi\rangle_{H^{s_1,s_2}}| \leqslant \epsilon \,\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}} + \|u^\tau_n - u^\tau\|_{H^{s_1,s_2}} \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}} ,$$

para todo $\varphi \in H^{s_1,s_2}$. Por lo tanto,

$$\|u_n - u\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant \epsilon + \|u^\tau_n - u^\tau\|_{H^{s_1,s_2}} . \tag{3.62}$$

Argumentos similares a los empleados en la Proposición 3.17 nos permiten mostrar que, para τ suficientemente pequeño,

$$\|u^\tau_n - u^\tau\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant C \,\|\psi^\tau_n - \psi^\tau\|_{H^{s_1,s_2}} \tau^{-\frac{1}{s}} \leqslant \|\psi_n - \psi\|_{H^{s_1,s_2}} \tau^{-\frac{1}{s}}.$$

Luego, fijando τ suficientemente pequeño, podemos concluir de (3.62) que

$$\|u_n - u\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant 2\epsilon,$$

para n suficientemente grande. □

Veamos ahora que el problema es bien planteado en los espacios X^{s_1,s_2}, $\tilde{X}^{s_1,s_2}$ y Y^{s_1,s_2}. Ya que las soluciones de (0.13) satisfacen la ecuacion integral

$$u = W_\alpha(t)\psi + \int_0^t W_\alpha(t-t')(u\partial_x u)(t')\,dt',$$

se tiene que $\partial_x^{-1} u$ y $\partial_x^{-1}\partial_y u$ satisfacen las ecuaciones

$$\partial_x^{-1} u = W_\alpha(t)\partial_x^{-1}\psi + \int_0^t W_\alpha(t-t')\left(\frac{u^2}{2}\right)(t')\,dt'$$

y

$$\partial_x^{-1}\partial_y u = W_\alpha(t)\partial_x^{-1}\partial_y\psi + \int_0^t W_\alpha(t-t')(u\partial_y u)(t')\,dt',$$

respectivamente. De aquí y del Teorema 3.9, para s_1 y s_2 como en ese teorema, se sigue que (0.13) es bien planteado en los espacios $\widehat{X}^{s_1,s_2}$, X^{s_1,s_2} e $\widehat{Y}^{s_1,s_2}$. El caso Y^{s_1,s_2} nos exige cierto esfuerzo adicional. Para dato inicial $\psi \in Y^{\infty}$, la solución u con dato inicial está $C([0,T_0],Y^{\infty})$. Podemos proceder como en la demostración del Lema 3.7, para demostrar que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^{-1}\partial_y u\|^2 \leqslant C(\|u_x\| + \|u_y\|)\|u\|^2_{Y^{s_1,s_2}}.$$

Esta desigualdad junto a 3.63 nos permiten demostrar que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{Y^{s_1,s_2}} \leqslant C(\|u_x\|_\infty + \|u_y\|_\infty)\|u\|^2_{Y^{s_1,s_2}}. \tag{3.63}$$

Gracias al lema de Gronwall se tiene la siguiente generalización del Lema 3.7,

$$\|u\|_{Y^s} \leqslant \|\psi\|_{Y^{s_1,s_2}} e^{C(\|u_x\|_{L^1_t L^\infty_{x,y}} + \|u_y\|_{L^1_t L^\infty_{x,y}})}.$$

Ahora, si ψ es arbitraria, de la misma forma que demostramos para el H^{s_1,s_2}, la solución $u \in C([0,T];Y^{s_1,s_2})$. Para ver que la transformación $\psi \mapsto u$ es continua de Y^{s_1,s_2} en $C([0,T];Y^{s_1,s_2})$ se repite el mismo argumento de Bona-Smith que emplamos antes. Así, pues resumiendo, reparafraseamos el Teorema (2.7) para la situación en el presente capítulo.

Teorema 3.20. *Sean s_1, s_2 y α como en Teorema 3.9. Sea, asimismo, Z cualquiera de los espacios X^{s_1,s_2}, $\widehat{X}^{s_1,s_2}$, Y^{s_1,s_2} y $\widehat{Y}^{s_1,s_2}$. Entonces, si $\psi \in Z$ y $u \in C([0,T],H^{s_1,s_2})$ es solución de* (0.13) *con $u(0) = \psi$, entonces $u \in C([0,T],Z)$. Más aún, $\psi \mapsto u$ es continua de Z en $C([0,T],Z)$*

4 Observaciones de mal planteamiento de la ecuación (0.13)

En este capítulo demostraremos que el flujo asociado a la ecuación (0.13) no es de clase C^2 para $-1 \leqslant \alpha < 0$. En particular, tenemos que no podemos aplicar el proceso iterativo de Picard para resolver la ecuación de Duhamel asociada a dicha ecuación.
Para ésto usaremos las ideas dadas en [29] para demostrar que el flujo asociado a la ecuación KP-I no es de clase C^2.

4.1. El flujo asociado al problema (0.13) no es C^2

Teorema 4.1. *Sean* $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ *y* $-1 \leqslant \alpha < 0$. *Entonces, no existe* $T > 0$ *tal que* (0.13) *tenga una única solución* u *para toda* $\phi \in H^{s_1 \cdot s_2}$ *y que el flujo* $S_t : \phi \mapsto u$ *sea de clase* C^2 *en* 0 *de* $H^{s_1 \cdot s_2}$ *en* $H^{s_1 \cdot s_2}$

Demostración. Veamos primero que debemos mostrar. Para ello consideremos $u(\lambda, t) = S_t(\lambda\phi)$, S_t el flujo asociado el problema (0.13). Así pues que esta solución satisface la ecuación de Duhamel asociada al ecuación (0.13), es decir

$$u(\lambda, t) = \lambda W_\alpha(t)\phi - \int_0^t W_\alpha(t - t')u(t')u_x(t')\, dt'. \tag{4.1}$$

Si el flujo es dos veces diferenciable alrededor de 0 en $H^{s_1 \cdot s_2}$ entonces, gracias a la regla de la cadena,

$$\partial_\lambda u(0, t) = W_\alpha(t)\phi,$$

y

$$\partial_\lambda^2 u(0, t) = -2 \int_0^t W_\alpha(t - t')W_\alpha(t')\phi W_\alpha(t')\phi_x\, dt'.$$

Lo que implicaría que la aplicación

$$\phi \mapsto \int_0^t W_\alpha(t - t')W_\alpha(t')\phi W_\alpha(t')\phi_x\, dt'$$

sería una forma cuadrática proveniente de una transformación bilineal simétrica continua en $H^{s_1 \cdot s_2}$, y que, en particular, para algún C fijo

$$\left\| \int_0^t W_\alpha(t - t')W_\alpha(t')\phi W_\alpha(t')\phi_x\, dt' \right\|_{H^{s_1 \cdot s_2}} \leqslant C\|\phi\|_{H^{s_1 \cdot s_2}}^2$$

para toda $\phi \in H^{s_1 \cdot s_2}$. Demostremos pues que éste no es el caso. Para ello supongamos que esta desigualdad se cumple y consideremos la función ϕ definida vía la transformada de Fourier por

$$\widehat{\phi} = \gamma^{-3/2} \mathbb{1}_{D_1} + \gamma^{-3/2} N^{-s_1 - \frac{3-\alpha}{2} s_2} \mathbb{1}_{D_2},$$

donde γ y N son números positivos tales que $\gamma \ll 1$ y $N \gg 1$, D_1 y D_2 son los conjuntos

$$D_1 = \left[\frac{\gamma}{2}, \gamma\right] \times \left[-\frac{\gamma^2}{6}, \frac{\gamma^2}{6}\right] \text{ y } D_2 = [N, N+\gamma] \times \left[\sqrt{-\frac{3}{\alpha}} N^{\frac{3-\alpha}{2}}, \sqrt{-\frac{3}{\alpha}} N^{\frac{3-\alpha}{2}} + \gamma^2\right]$$

y $\mathbb{1}_{D_i}$ son las funciones características de los conjuntos D_i, $i = 1, 2$. $\|\phi\|_{H^{s_1 \cdot s_2}} \sim 1$ para cualesquiera valores que se tomen de γ y de N. Veamos que para una conveniente elección en los parámetros de γ y N,

$$\left\| \int_0^t W_\alpha(t-t') W_\alpha(t') \phi W_\alpha(t') \phi_x \, dt' \right\|_{H^{s_1 \cdot s_2}} \tag{4.2}$$

se puede hacer tan grande como se quiera. Haciendo un calculo directo de su transformada de Fourier, se sigue que

$$\int_0^t W_\alpha(t-t') W_\alpha(t') \phi W_\alpha(t') \phi_x \, dt' \tag{4.3}$$

es $f_1 + f_2 + f_3$ donde

$$\widehat{f_1}(t, \xi, \eta) = \frac{i\xi e^{it(\xi^3 + \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha \eta^2)}}{2\gamma^3} \int_{\substack{(\xi_1,\eta_1)\in D_1 \\ (\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)\in D_1}} \frac{e^{-it\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} - 1}{\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} \, d\xi_1 d\eta_1,$$

$$\widehat{f_2}(t, \xi, \eta) = \frac{i\xi e^{it(\xi^3 + \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha \eta^2)}}{2\gamma^3 N^{2(s_1 + \frac{3-\alpha}{2} s_2)}} \int_{\substack{(\xi_1,\eta_1)\in D_2 \\ (\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)\in D_2}} \frac{e^{-it\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} - 1}{\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} \, d\xi_1 d\eta_1$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{f_3}(t, \xi, \eta) =& \frac{i\xi e^{it(\xi^3 + \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha \eta^2)}}{2\gamma^3 N^{s_1 + \frac{3-\alpha}{2} s_2}} \int_{\substack{(\xi_1,\eta_1)\in D_2 \\ (\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)\in D_1}} \frac{e^{-it\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} - 1}{\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} \, d\xi_1 d\eta_1 + \\ &+ \frac{i\xi e^{it(\xi^3 + \operatorname{sgn}(\xi)|\xi|^\alpha \eta^2)}}{2\gamma^3 N^{s_1 + \frac{3-\alpha}{2} s_2}} \int_{\substack{(\xi_1,\eta_1)\in D_1 \\ (\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)\in D_2}} \frac{e^{-it\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} - 1}{\chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} \, d\xi_1 d\eta_1,\end{aligned}$$

donde χ es la función resonante

$$\begin{aligned}\chi = \chi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1) &= \vartheta(\xi,\eta) - \vartheta(\xi_1,\eta_1) - \vartheta(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1) \\ &= 3\xi\xi_1(\xi-\xi_1) + \operatorname{sgn}(\xi)\frac{\eta^2}{|\xi|^\theta} - \operatorname{sgn}(\xi_1)\frac{\eta_1^2}{|\xi_1|^\theta} - \operatorname{sgn}(\xi-\xi_1)\frac{(\eta-\eta_1)^2}{|\xi-\xi_1|^\theta},\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde

$$\vartheta(\xi,\eta) = \xi^3 + \operatorname{sgn}(\xi)\frac{\eta^2}{|\xi|^\theta}, \tag{4.5}$$

es la función de fase y $\theta = -\alpha$, que está entre 0 y 1. Ya que en nuestro caso ξ, ξ_1 y $\xi - \xi_1$ son todos positivos, tenemos

$$\chi = 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) + \frac{\eta^2}{\xi^\theta} - \frac{\eta_1^2}{\xi_1^\theta} - \frac{(\eta - \eta_1)^2}{(\xi - \xi_1)^\theta} \tag{4.6}$$

Obsérvese que para estimar (4.2) es suficiente estimar $\|f_3(t)\|_{H^{s_1,s_2}}$, de hecho,

$$\left\| \int_0^t W_\alpha(t-t')W_\alpha(t')\phi W_\alpha(t')\phi_x \, dt' \right\|_{H^{s_1 \cdot s_2}} \geqslant \|f_3(t)\|_{H^{s_1,s_2}}.$$

Para continuar necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.2. *Supongamos que*

$$(\xi_1, \eta_1) \in D_1 \qquad y \qquad (\xi - \xi_1, \eta - \eta_1) \in D_2$$

o

$$(\xi_1, \eta_1) \in D_2 \qquad y \qquad (\xi - \xi_1, \eta - \eta_1) \in D_1.$$

Entonces,

$$|\chi(\xi, \xi_1, \eta, \eta_1)| \lesssim \gamma^2 N.$$

Demostración. Primero calculemos los η tales que $\chi(\xi, \xi_1, \eta, \eta_1) = 0$. Así pues, tenemos

$$[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]\xi_1^\theta \eta^2 - 2\xi^\theta \xi_1^\theta \eta_1 \eta + [\xi_1^\theta + (\xi - \xi_1)^\theta]\xi^\theta \eta_1^2 - 3\xi^{1+\theta}\xi_1^{1+\theta}(\xi - \xi_1)^{1+\theta} = 0 \tag{4.7}$$

Luego, tenemos que

$$\eta = \frac{\xi^\theta \eta_1}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]} \pm \sqrt{\frac{3\xi^{1+\theta}\xi_1(\xi - \xi_1)^{1+\theta}}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]} + \frac{\xi^\theta(\xi - \xi_1)^\theta[\xi_1^\theta + (\xi - \xi_1)^\theta - \xi^\theta]\eta_1^2}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]^2 \xi_1^\theta}} \tag{4.8}$$

Sea $\eta*$ el cero de menor tamaño entre los dos calculados anteriormente. Así pues,

$$\eta^* - \eta_1 = \frac{(\xi - \xi_1)^\theta \eta_1}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]} - \sqrt{\frac{3\xi^{1+\theta}\xi_1(\xi - \xi_1)^{1+\theta}}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]} + \frac{\xi^\theta(\xi - \xi_1)^\theta[\xi_1^\theta + (\xi - \xi_1)^\theta - \xi^\theta]\eta_1^2}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]^2 \xi_1^\theta}}. \tag{4.9}$$

Sea

$$R = \frac{(\xi - \xi_1)^\theta \eta_1}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]} + \sqrt{\frac{3\xi^{1+\theta}\xi_1(\xi - \xi_1)^{1+\theta}}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]} + \frac{\xi^\theta(\xi - \xi_1)^\theta[\xi_1^\theta + (\xi - \xi_1)^\theta - \xi^\theta]\eta_1^2}{[\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta]^2 \xi_1^\theta}}.$$

Entonces

$$|\eta^* - \eta_1| = \frac{\frac{(\xi^\theta - \xi_1^\theta)(\xi - \xi_1)^\theta}{(\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta)\xi_1^\theta}\left|\eta_1^2 - 3\xi^{1+\theta}\xi_1^{1+\theta}g(\xi, \xi_1)\right|}{R}, \tag{4.10}$$

donde

$$g(\xi,\xi_1)=\begin{cases}\dfrac{\xi-\xi_1}{\xi^\theta-\xi_1^\theta} & \text{si } \xi\neq\xi_1\\ \frac{1}{\theta}\xi_1^{1-\theta} & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Ahora bien, como

$$\frac{1}{\theta}\xi_1^{1-\theta}\leqslant g(\xi,\xi_1)\leqslant\frac{1}{\theta}\xi^{1-\theta} \tag{4.11}$$

y

$$R\geqslant\frac{(\xi-\xi_1)^\theta\eta_1}{(\xi^\theta-(\xi-\xi_1)^\theta)},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}|\eta^*-\eta_1| &= \frac{\xi^\theta-\xi_1^\theta}{\xi_1^\theta}\frac{\left|\eta_1^2-3\xi^{1+\theta}\xi_1^{1+\theta}g(\xi,\xi_1)\right|}{\eta_1}\\ &\leqslant 3\frac{\xi^\theta-\xi_1^\theta}{\xi_1^\theta}\left|\eta_1-\sqrt{3}\xi^{\frac{1+\theta}{2}}\xi_1^{\frac{1+\theta}{2}}\sqrt{g(\xi,\xi_1)}\right|\\ &\leqslant 3\theta\frac{\xi-\xi_1}{\xi_1}\left|\eta_1-\sqrt{\frac{3}{\theta}}\xi_1^{\frac{3+\theta}{2}}-\xi_1^{\frac{1+\theta}{2}}\left(\xi^{\frac{1+\theta}{2}}\sqrt{g(\xi,\xi_1)}-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\xi_1\right)\right|,\end{aligned}$$

Recordemos que η_1 toma valores en $\left[\sqrt{\frac{3}{\theta}}N^{\frac{3+\theta}{2}},\sqrt{\frac{3}{\theta}}N^{\frac{3+\theta}{2}}+\gamma^2\right]$ y que ξ_1 en $[N,N+\gamma]$. Así que, gracias a la formúla de Taylor con resto aplicada a la función $x\mapsto x^{\frac{3+\theta}{2}}$,

$$\sqrt{3}\xi_1^{\frac{3+\theta}{2}}\in\left[\sqrt{3}N^{\frac{3+\theta}{2}},\sqrt{3}N^{\frac{3+\theta}{2}}+\sqrt{3}\frac{3+\theta}{2}N^{\frac{1+\theta}{2}}\gamma+\sqrt{3}\frac{(3+\theta)(1+\theta)}{8}\gamma^2\right]$$

y, más aún

$$\left|\eta_1-\sqrt{3}\xi_1^{\frac{3+\theta}{2}}\right|\leqslant 2\sqrt{3}N^{\frac{1+\theta}{2}}\gamma+\sqrt{3}\gamma^2.$$

Por otro lado de (4.11)

$$\xi^{\frac{1+\theta}{2}}\sqrt{g(\xi,\xi_1)}-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\xi_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{\theta}}(\xi-\xi_1)\leqslant\frac{1}{\sqrt{\theta}}\gamma.$$

Por lo tanto,

$$|\eta^*-\eta_1|\leqslant 3\theta\frac{\gamma}{N}\left(2\sqrt{\frac{3}{\theta}}N^{\frac{1+\theta}{2}}\gamma+\sqrt{\frac{3}{\theta}}\gamma^2+\sqrt{\frac{3}{\theta}}(N^{\frac{1+\theta}{2}}+\gamma)\gamma\right)\leqslant 18\sqrt{\theta}\frac{\gamma^2}{N^{\frac{1-\theta}{2}}}.$$

Del teorema del valor medio, existe $\bar{\eta} \in [\eta, \eta^*]$ tal que

$$\begin{aligned}
\chi(\xi, \xi_1, \eta, \eta_1) &= \chi(\xi, \xi_1, \eta^*, \eta_1) + (\eta - \eta^*)\partial_\eta \chi(\xi, \xi_1, \bar{\eta}, \eta_1) \\
&= -(\eta - \eta^*)\frac{2(\bar{\eta}(\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta) - \eta_1 \xi^\theta)}{\xi^\theta (\xi - \xi_1)^\theta} \\
&= -(\eta - \eta^*)\frac{2((\bar{\eta} - \eta_1)\xi^\theta - (\xi - \xi_1)^\theta \bar{\eta})}{\xi^\theta (\xi - \xi_1)^\theta} \\
&= -(\eta - \eta^*)2\left(\frac{\bar{\eta} - \eta_1}{(\xi - \xi_1)^\theta} - \frac{\bar{\eta}}{\xi^\theta}\right).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
|\chi(\xi, \xi_1, \eta, \eta_1)| &\lesssim \frac{\gamma^2}{N^{\frac{1-\theta}{2}}}\left(\frac{\gamma^2}{N^{\frac{1-\theta}{2}}\gamma^\theta} + \frac{N^{\frac{3+\theta}{2}}}{N^\theta}\right) \\
&\lesssim \gamma^2 N
\end{aligned}$$

El lema sigue inmediatamente al observar que

$$\chi(\xi, \xi_1, \eta, \eta_1) = \chi(\xi, \xi - \xi_1, \eta, \eta - \eta_1).$$

□

Terminemos la demostración del teorema. Elijamos γ y N en tal forma $\gamma^2 N = N^{-\varepsilon}$ para $\varepsilon \ll 1$. Gracias al lema anterior se tiene que

$$\left|\frac{e^{it\xi} - 1}{\xi}\right| = |t| + O(N^{-\epsilon})$$

para $(\xi_1, \eta_1) \in D_1$ y $(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1) \in D_2$ o $(\xi_1, \eta_1) \in D_2$ y $(\xi - \xi_1, \eta - \eta_1) \in D_1$. Así que

$$\|f_3(t, \cdot, \cdot)\|_{H^s} \gtrsim \frac{N N^{\frac{3+\theta}{2}s}\gamma^3 \gamma^{\frac{3}{2}}}{N^{\frac{3+\theta}{2}s}\gamma^3} = \gamma^{\frac{3}{2}} N = N^{(1-3\varepsilon)/4}.$$

Esto nos lleva a contradicción ya que

$$1 \sim \|\phi\|_{H^s}^2 \gtrsim \|f_3(t, \cdot, \cdot)\|_{H^s}.$$

□

Una consecuencia inmediata del anterior teorema es el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Para $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $-1 \leqslant \alpha < 0$ y un número real positivo T, no existe un espacio X_T encajado continuamente en $C([-T, T], H^{s_1,s_2})$ tal que, para una constante fija C,*

$$\|W_\alpha(\cdot)\phi\|_{X_T} \leqslant C\|\phi\|_{H^{s_1,s_2}}, \tag{4.12}$$

para toda $\phi \in H^{s_1,s_2}$*, y*

$$\left\| \int_0^t W_\alpha(t-t')(u(t')u_x(t'))\,dt' \right\|_{X_T} \leqslant C\|u\|_{X_T}^2, \tag{4.13}$$

para toda $u \in X_T$*.*

Obsérvese que las estimativas dadas en la afirmación del teorema son necesarias para probar las propiedades de contracción del operador Φ definido por

$$\Phi(u) = W_\alpha(t)\phi + \int_0^t W_\alpha(t-t')(u(t')u_x(t'))\,dt'.$$

Demostración. Supongamos que se tienen (4.12) y (4.13) para toda $\phi \in H^{s_1,s_2}$ y para toda $u \in X_T$. Sea $\phi \in H^{s_1,s_2}$ y hagamos $u(t) = W_\alpha(t)\phi$. Entonces,

$$\left\| \int_0^t W_\alpha(t-t')(W_\alpha(t')\phi W_\alpha(t')\phi_x)\,dt' \right\|_{X_T} \leqslant C\|W_\alpha(t)\phi\|_{X_T}^2 \leqslant \|\phi\|_{H^{s_1,s_2}}^2.$$

Ya que X_T está encajado continuamente en $C([-T,T],H^{s_1,s_2})$

$$\left\| \int_0^t W_\alpha(t-t')(W_\alpha(t')\phi W_\alpha(t')\phi_x)\,dt' \right\|_{H^{s_1,s_2}} \leqslant C\|\phi\|_{H^{s_1,s_2}}^2,$$

lo que es contradictorio con el teorema anterior. Esto termina la demostración. □

Otro corolario inmediato es el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *El flujo asociado al problema* (0.13)*, para* $-1 \leqslant \alpha < 0$*, cuyo buen planteamiento fue probado anteriormente, no es de clase* C^2*.*

Bibliografía

[1] Ablowitz, M. J., and Clarkson, P. A. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, vol. 149 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] Ablowitz, M. J., and Segur, H. Long internal waves in fluids of great depth. *Stud. Appl. Math. 62*, 3 (1980), 249–262.

[3] Benjamin, T. B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *J. Fluid Mech. 29* (1967), 559–592.

[4] Benjamin, T. B. The stability of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A 328* (1972), 153–183.

[5] Benjamin, T. B., Bona, J. L., and Mahony, J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 272*, 1220 (1972), 47–78.

[6] Bona, J. On the stability theory of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A 344*, 1638 (1975), 363–374.

[7] Bona, J. L., and Smith, R. The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 278*, 1287 (1975), 555–601.

[8] Castro, A., Córdoba, D., and Gancedo, F. Singularity formations for a surface wave model. *Nonlinearity 23*, 11 (2010), 2835–2847.

[9] Ginibre, J., and Velo, G. Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolut ion equations. *Comm. Math. Phys 144*, 1 (1992), 163–188.

[10] Kadomtsev, B. B., and Petviashvili, V. I. On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media. *Soviet Physics Doklady 15* (Dec. 1970), 539.

[11] Kato, T. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In *Spectral theory and differential equations (Proc. Sympos., Dundee, 1974; dedicated to Konrad Jörgens)*, vol. 448 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1975, pp. 25–70.

[12] Kato, T. On the Korteweg-de Vries equation. *Manuscripta Math. 28*, 1-3 (1979), 89–99.

[13] Kato, T. *Perturbation theory for linear operators.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[14] Kato, T., and Ponce, G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math. 41*, 7 (1988), 891–907.

[15] Kenig, C. E. On the local and global well-posedness theory for the KP-I equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 21*, 6 (2004), 827–838.

[16] Kenig, C. E., Martel, Y., and Robbiano, L. Local well-posedness and blow-up in the energy space for a class of L^2 critical dispersion generalized Benjamin-Ono equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 28*, 6 (2011), 853–887.

[17] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math. 46*, 4 (1993), 527–620.

[18] Kim, B. *Three-dimensional solitary waves in dispersive wave systems.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Mathematics., Cambridge, MA, 2006.

[19] Klein, C., and Saut, J.-C. A numerical approach to blow-up issues for dispersive perturbations of Burgers' equation. *Phys. D 295/296* (2015), 46–65.

[20] Kobayasi, K. On a theorem for linear evolution equations of hyperbolic type. *J. Math. Soc. Japan 31*, 4 (1979), 647–654.

[21] Lannes, D. *The water waves problem*, vol. 188 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. Mathematical analysis and asymptotics.

[22] Lannes, D., and Saut, J.-C. Remarks on the full dispersion Kadomtsev-Petviashvli equation. *Kinet. Relat. Models 6*, 4 (2013), 989–1009.

[23] Linares, F., and Pastor, A. Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov-Kuznetsov equation. *SIAM J. Math. Anal. 41*, 4 (2009), 1323–1339.

[24] Linares, F., Pilod, D., and Saut, J.-C. Well-posedness of strongly dispersive two-dimensional surface wave Boussinesq systems. *SIAM J. Math. Anal. 44*, 6 (2012), 4195–4221.

[25] Linares, F., Pilod, D., and Saut, J.-C. Remarks on the orbital stability of ground state solutions of fkdv and related equations. *Preprint* (2015). Arxiv, math.AP, 1503.03084.

[26] Linares, F., Pilod, D., and Saut, J.-C. The cauchy problem for the fractional kadomtsev-petviashvili equations. *Preprint* (2017). ArXiv:1705.09744v1.

[27] Linares, F., and Ponce, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Universitext (1979). Springer, 2009.

[28] Lizarazo Osorio, J. d. C. El problema de Cauchy de la clase de ecuaciones de dispersión generalizada de Benjamin-Ono bidimensionales. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2018.

[29] Molinet, L., Saut, J.-C., and Tzvetkov, N. Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev-Petviashvili-I equation. *Duke Math. J. 115*, 2 (2002), 353–384.

[30] Ono, H. Algebraic solitary waves in stratified fluids. *J. Phys. Soc. Japan 39*, 4 (1975), 1082–1091.

[31] Pego, R. L., and Weinstein, M. I. Asymptotic stability of solitary waves. *Comm. Math. Phys. 164*, 2 (1994), 305–349.

[32] Reed, M., and Simon, B. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.

[33] Sánchez Salazar, F. El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo rBO-ZK. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2015.

[34] Saut, J.-C. Remarks on the generalized kadomtsev-petviashvili equations. *Indiana University Mathematics Journal 42*, 3 (1993), 1011–1026.

[35] Stein, E. M., and Weiss, G. L. Introduction to fourier analysis on euclidean spaces. *Princeton Mathematical Series*, 32 (1971).

[36] Whitham, G. B. Variational methods and applications to water waves. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 299*, 1456 (1967), 6–25.

[37] Zabusky, N., and Kruskal, M. Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett. 15* (Aug 1965), 240–243.